

Die eindimensionale Dirac-Gleichung

Andreas Windisch

Vortrag zum *Projektpraktikum*
22. April 2010

Mit

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (1)$$

und der Ersetzungsregel

$p \rightarrow -i\hbar\nabla$ finden wir:

$$H_{SQRT} = \sqrt{-c^2 \hbar^2 \Delta + m^2 c^4} \quad (2)$$

SQRT-Klein-Gordon-Equation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = H_{SQRT} \psi(\vec{x}, t) \quad (3)$$

Probleme der SQRT-Klein-Gordon-Gleichung

- 1 EM-Felder
- 2 Falsche Eigenwerte für H-Atom
- 3 Wurzel aus Differentialoperator ist nichtlokal
- 4 Durch Operator generierte Zeitentwicklung nicht kausal
- 5 Lösungen sind skalare Wellenfunktionen

Dirac-Gleichung, Dirac-Spinoren und Zustandsraum

Dirac 1926: Linearisierung der
Quadratwurzel

Dirac's Ansatz

$$E = \alpha cp + \beta mc^2 \quad (4)$$

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 0, \quad \alpha^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \quad (5)$$

Standarddarstellung

Die Standarddarstellung besteht
aus folgender Wahl:

$$\alpha = \sigma_1, \quad \beta = \sigma_3 \quad (6)$$

mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

der ersten und dritten Paulimatrix.

Die Dirac-Gleichung

Zusammengefasst ist die
Dirac-Gleichung dann:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H_0 \psi(x, t), \quad (8)$$

mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} mc^2 & -i\hbar c \frac{d}{dx} \\ -i\hbar c \frac{d}{dx} & -mc^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Spinoren und Hilbertraum

Lösungen sind Spinoren:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2. \quad (10)$$

Hilbertraum:

$$L^2(\mathbb{R})^2 = L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R}) \quad (11)$$

Lösung der Dirac-Gleichung, Spinordarstellung

Zusammenfassung der Lösung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -i c \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) + \sigma_3 m c^2 \psi(x, t) \quad (12)$$

mit den zu H_0 gehörenden Eigenspinoren

$$u_{\text{pos}}(k; x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_{\text{pos}}(k) e^{ikx - i\lambda(k)t} \quad (13)$$

$$u_{\text{neg}}(k; x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_{\text{neg}}(k) e^{ikx + i\lambda(k)t} \quad (14)$$

und Eigenenergie

$$\lambda(k) = \sqrt{c^2 k^2 + m^2 c^4} \quad (\text{pos.SQRT}), \quad (15)$$

wobei

$$u_{\text{pos}}(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{m c^2}{\lambda(k)}\right)^{1/2} \\ \frac{\text{sgn}(k)}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{m c^2}{\lambda(k)}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

und

$$u_{\text{neg}}(k) = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sgn}(k)}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{m c^2}{\lambda(k)}\right)^{1/2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{m c^2}{\lambda(k)}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

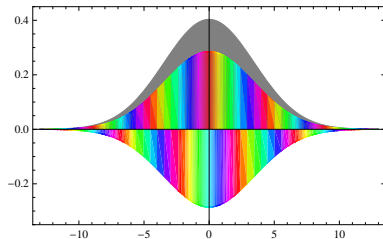


Figure: Darstellung eines Spinors

Verhalten der Lösungen

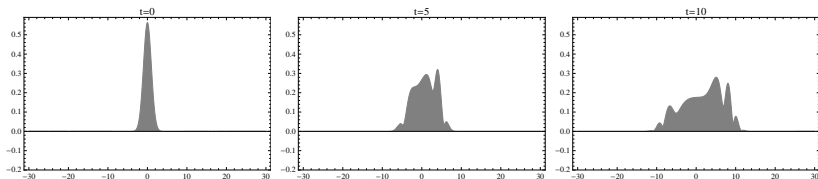


Figure: Zeitentwicklung der Ortswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x)|$ eines Gauß'schen Wellenpaketes

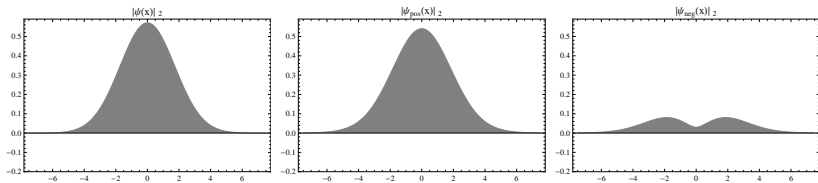


Figure: $|\psi(x)|$, sowie $|\psi_{pos}(x)|$ und $|\psi_{neg}(x)|$ eines Gauß'schen Spinors

Zitterbewegung

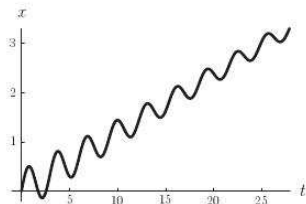


Figure: Zitterbewegung,
entnommen aus *Advanced
Visual Quantum Mechanics* von
B. Thaller