Karl Franzens Universität Graz
Institut für Physik

Tutorium aus Quantenmechanik
13. Mai 2010
Andreas Windisch

1 Hinweise zum 8. Übungsblatt

1.1 ad Aufgabe 38

In der **Aufgabe 38** haben wir es mit einem quantenmechanischen System zu tun, dessen zeitunabhängiger Hamiltonoperator Eigenzustände ν mit nicht-entarteten Eigenwerten E_ν besitzt. Die Eigenwertgleichung ist dann:

$$H|\nu\rangle = \hbar\omega_\nu|\nu\rangle. \tag{1.1.1}$$

Ferner haben wir eine Observable A im selben Raum, welche ebenfalls nicht-entartete Eigenwerte besitzt. Das Eigenwertproblem für A ist:

$$A|n\rangle = a_n|n\rangle. \tag{1.1.2}$$

Das System ist zu Beginn im Zustand $|\nu\rangle$, hernach führen wir eine Messung A auf dem System aus.

1.1.1 ad Punkt (a)

Hier erinnern wir uns an eines der **grundlegenden Postulate der Quantenmechanik**:

Probabilistisches Messergebnis

Messen wir eine Observable A auf einem System im Zustand $|\psi\rangle$, so ist die Wahrscheinlichkeit nach der Messung einen nicht-entarteten Eigenwert a_n des Operators A zu finden gegeben durch:

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle n|\psi\rangle|^2}{\langle n|n\rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle n|n\rangle}, \tag{1.1.3}$$

wobei für orthonormale Eigenzustände von A die Normierung entfällt.

1.1.2 ad Punkt (b)

Hier benötigen wir die Definition des Erwartungswertes $\langle A\rangle$ von A bezüglich des Zustandes $|\nu\rangle$, zweimaliges Einschieben der $\mathbb{1}$ mittels der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_j |j\rangle\langle j| = \mathbb{1} \tag{1.1.4}$$

könnte hier Vorteilhaft sein.

1.1.3 ad Punkt (c)

Um diese Frage zu beantworten ist Kenntnis zweier Umstände von Nöten: Zum einen müssen wir erkennen, dass durch die vorherige Messung der Zustand $|m\rangle$ **präpariert** wurde. Haben wir dies erst erkannt, so wollen wir wissen wie dieser Zustand in der Zeit evolviert. Im **Schrödingerbild** entwickelt sich ein Zustand gemäß des unitären Zeitenwicklungsoperators $\mathscr{U}$:

$$\mathscr{U}(t, t_0 = 0) \equiv \mathscr{U}(t) = \exp\{\frac{-iHt}{\hbar}\}. \tag{1.1.5}$$

Zusammen mit dem Einschieben der $\mathbb{1}$ und der in Punkt (a) dargelegten Interpretation sollte dieses Problem nun lösbar sein.

1.2 ad Aufgabe 39

In **Aufgabe 39** darf man sich nicht von der Einbettung in ein sehr komplexes Gebiet abschrecken lassen. Im nächsten Abschnitt wird einiges über Neutrinos und Neutrinodetektoren gesagt (siehe auch [F$^+$98]), diese Kenntnis ist aber für ein Lösen des gegebenen Problemes nicht nötig.
Ohne Einkleidung präsentiert sich das Problem, nun mehr oder weniger nackt, wie folgt: Wir haben einen Hamiltonoperator H eines quantenmechanischen Systemes, welches ein freies Neutrino mit Impuls p und Energie $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \approx pc + \frac{m^2c^4}{2pc}$ beschreibt. Der Hamiltonoperator hat Eigenzustände der Form:

$$H|\nu_1\rangle = E_1|\nu_1\rangle, \quad E_1 = pc + \frac{m_1^2c^4}{2pc} \tag{1.2.1}$$

$$H|\nu_2\rangle = E_2|\nu_2\rangle, \quad E_2 = pc + \frac{m_2^2c^4}{2pc}. \tag{1.2.2}$$

Wir betrachten nun Zustände, die eine Überlagerung aus diesen Eigenzuständen sind:

$$|\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle\cos\theta + |\nu_2\rangle\sin\theta, \tag{1.2.3}$$

$$|\nu_\mu\rangle = -|\nu_1\rangle\sin\theta + |\nu_2\rangle\cos\theta. \tag{1.2.4}$$

1.2.1 ad Punkt (a)

Hier ist die Idee dieselbe wie vorher, dh. wir müssen den Zeitentwicklungsoperator bemühen und auf den Zustand wirken lassen.

1.2.2 ad Punkt (b)

Nachdem wir im vorherigen Punkt einen Ausdruck für $|\nu_{\mu,t}\rangle$ gefunden haben können wir nun wie im ersten Problem des Übungsblattes den Überlapp mit dem Zustand $\langle\nu_e|$ bilden, von dem wir anschließend das Betragsquadrat bilden müssen, da wir ja an der Wahrscheinlichkeit interessiert sind.

ACHTUNG!
Der Betrag einer komplexen Zahl ist: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ **!**

Unter Verwendung diverser trigonometrischer Additionstheoreme/Beziehungen läßt sich das Ergebnis recht kompakt angeben.

1.2.3 ad Punkt (c)

Neutrinos bewegen sich nahezu mit $v = c$, deshalb kann man mit dem Ergebnis von Punkt (b) und mit

$$t = \frac{l}{c} \tag{1.2.5}$$

schnell eine Lösung angeben.

1.2.4 ad Punkt (d)

Die entsprechende Länge erhält man, indem man den Ausdruck aus dem Ergebnis von (b) gleich 1 setzt, die entsprechenden angegebenen Werte einsetzt und nach l löst.

1.2.5 ad Punkt (e)

Hier setzt man den Ausdruck aus dem Ergebnis aus (b) auf 0.1 und löst entsprechend wie in der vorherigen Aufgabe. Ich wuensche Euch gutes gelingen für den Übungszettel!

2 Neutrinos und Neutrinodetektor Super-Kamiokande

Einen guten Überblick über Neutrinos und Neutrinodetektion kann man unter [URL] finden. Hier ein kurzer Überblick, basierend auf [Gri87].

2.1 Neutrinos

In den 1930er Jahren hatte man ein Problem beim Studium von nuklearem Betazerfall. Beim Betazerfall zerfällt ein radioaktiver Kern A unter Emission eines Elektrons in einen etwas leichteren Kern B:

$$A \rightarrow B + e^-. \tag{2.1.1}$$

Das Gesetz der Ladungserhaltung fordert nun, dass B eine Ladung trägt die um eine Einheit positiver ist als jene von A. Solche zweikörperzerfälle zeichnen sich durch folgenden Umstand aus: Ist der Mutterkern A in Ruhe, sodass B und das Elektron *back to back* emittiert werden, so sagt uns die Energieerhaltung dass die Energie des Elektrons durch

$$E = (\frac{m_A^2 - m_B^2 + m_e^2}{2m_A})c^2 \tag{2.1.2}$$

gegeben ist. Ohne näher auf die Herleitung dieser Formel einzugehen können wir dennoch erkennen, dass, wenn die drei Massen erst bekannt sind, die Energie *fixiert* ist. Im Experiment jedoch fand man unterschiedliche Energien. Die Gleichung für E legt lediglich die maximale Energie für einen bestimmten Betazerfall fest.
Pauli postulierte daraufhin ein weiteres Teilchen, welches zusammen mit dem Elektron emittiert wird und die restliche Energie trägt. Pauli nannte dieses Teilchen später das *Neutrino*. Für den betrachteten Prozess tritt tatsächlich ein Antineutrino auf:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}, \tag{2.1.3}$$

dh. ein Neutron zerfällt in ein Proton und ein Elektron und ein Antineutrino. Neutrinos sind sehr leicht (nahezu keine Masse). Bereits in den 1950er Jahren wurde das Phänomen der Neutrinooszillation postuliert, nachgewiesen wurde die Oszillation tatsächlich u.a. am Detektor Super-Kamiokande.

2.2 Super-Kamiokande

Der Detektor Super-Kamiokande (siehe auch [SK]) besteht aus etwa 50000 Tonnen Wasser, welches in einen zylindrischen Tank gefüllt ist (Abmaße: 39.9m Durchmesser und 41.4m Höhe), einem Wasser- und Luftreinigungssystem, Photonmultipliertubes (PMT), Elektronik, Online-Daten-Erfassungssystemen, sowie Offline-Rechenzentren. Der Detektor ist 1000m unter der Erde in einer Mine in Japan. Ein Schema des Detektors ist in Abbildung 1 zu sehen. Der Detektor befindet sich unter der Erde um ihn gegen kosmische Strahlungs-Myonen abzuschirmen. Gegenüber der Oberfläche ist die Intensität der Myonen auf Detektorlevel auf etwa 1/100000 reduziert. Die Wände der Höhle sind mit einem Polyurethankunststoff bedeckt, der die Radonabstrahlung des Gesteins unterdrückt. Der Tank selbst besteht aus rostfreiem Stahl und ist in einen inneren und

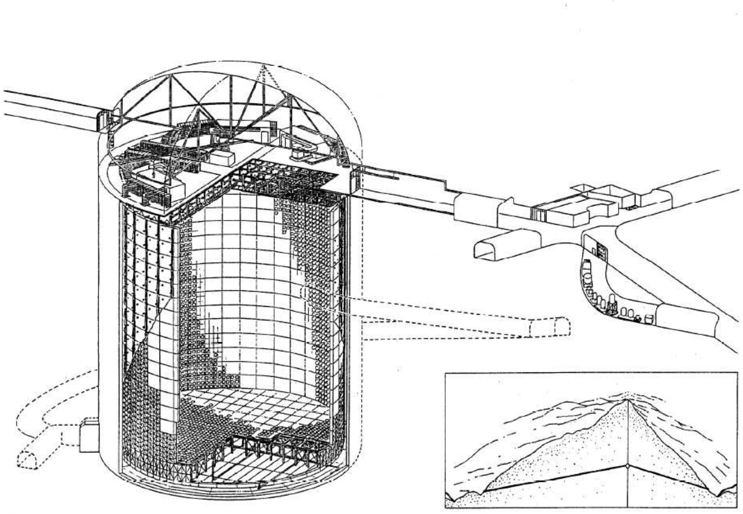

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Detektors Super-Kamiokande, Bild von [SK]

einen äußeren Teil gegliedert. Der Grund für diese Teilung ist hauptsächlich dass verbleibende Muyon-Events von außerhalb des Tanks identifiziert werden wollen, außerdem ist so der innere Teil vor Gamma-Strahlung des Gesteins geschützt. Der Tank ist gasdicht um die Radonreiche Luft am Eindringen zu hindern.
Im inneren Detektor kommen 11146 20-Zoll (50.8 cm) und im äußeren 1885 8-Zoll (20.3 cm) PMTs zum Einsatz. Die PMTs im Inneren sind im Abstand von 70 cm montiert, das Verhältnis aus PMT-Fläche zu Gesamt-Fläche (photocoverage) ist 40.41%. Im äußeren Detektor sind stets zwei PMTs hinter jeder Gruppe von 12 inneren PMTs. Abbildung 2 zeigt solche PMTs. Der Bau begann

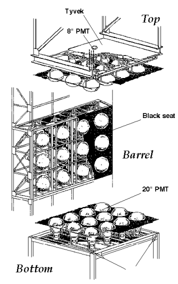

Abbildung 2: PMTs und Rahmen, Bild von [SK]

1991, 1995 war der Bau des Wassertanks abgeschlossen. Ebenfalls im Jahre 1995 wurden die PMTs installiert. Das Befüllen des Wassertanks dauerte von Jänner bis März 1996. Der ordentliche Betrieb wurde am 1. April 1996 aufgenommen.

Literatur

[F$^+$98] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, 81, 1998.

[Gri87] D. Griffiths. *Introduction To Elementary Particles.* Wiley and Sons, 1987.

[SK] Super-Kamiokande. `http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk`.

[URL] URL1. `http://www.ps.uci.edu/~superk/neutrino.html`.