Uni Graz
TU Graz

S. Kofler, A. Windisch
M. Holzmann, J. Rohleder, M. Zank

Vektoranalysis (für PhysikerInnen)

SS 2014

10. Übungsblatt

17. Juni

Aufgabe 1
Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Green das Integral

$$\oint_{\partial B} (xy^2 - 2x)dx + (x - e^y)dy,$$

wobei B der Bereich ist, der von den Kurven $y = x + 2$ und $y = x^2$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 2
Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Green das Integral

$$\oint_{\partial B} y^3dx + x^2ydy,$$

wobei B der Bereich ist, der durch die Geraden $y = 0$, $y = 4 + x$ und $y = 4 - x$ berandet ist.

Aufgabe 3
Verwenden Sie den Satz von Green zur Berechnung des Integrals

$$\oint_C (3x^3y + xy^3)dx + 2dy;$$

hierbei ist C der Rand des Bereiches $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Aufgabe 4
Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Integral

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA \quad \text{mit} \quad \vec{F}(x,y,z) = (x^2 + z, x - y, yz),$$

wobei S eine Fläche ist, die von

$$C_1 : y = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2, z = 0 \quad \text{und} \quad C_2 : z = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2, y = 0$$

berandet wird.

Aufgabe 5
Es sei $\vec{V}(x,y,z) = (z, -z, y)$ und S eine Fläche, die durch die Kurve

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

berandet ist. Berechnen Sie das Integral $\iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} dA$.

Lösungen zum 10. Übungsblatt aus Vektoranalysis SS14

(1)

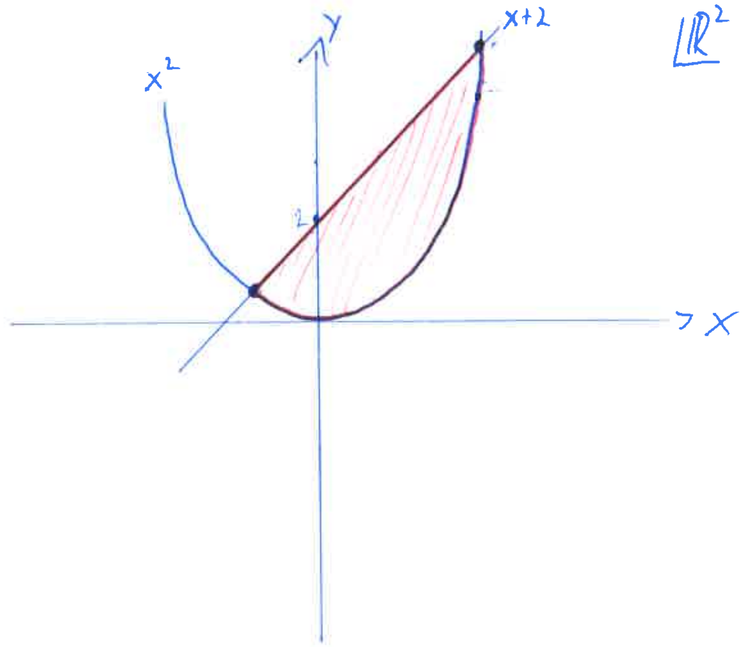
A. Windisch

Aufgabe 1

Green's theorem:

$$\iint_{A} \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint_{\partial A} \left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \right)$$

$$A : \begin{cases} y = x+2 \\ y = x^2 \end{cases}$$



$$f(x,y) = (xy^2 - 2x)$$
$$g(x,y) = (x - e^y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1$$

Parametrize boundaries for A:

$${}_{min}X_{max} : x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow {}_{min}X_{max} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} x_{min} = -1 \\ x_{max} = 2 \end{cases}$$

$$y_{min} = x^2, \quad y_{max} = x+2$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy \left[1 - 2xy \right] =$$

$$= \int_{-1}^{2} dx \left[x + 2 - x^2 - x\left(x^2 + 4x + 4 - x^4\right) \right] = \int_{-1}^{2} dx \left[x + 2 - x^2 - x^3 - 4x^2 - 4x + x^5 \right]$$

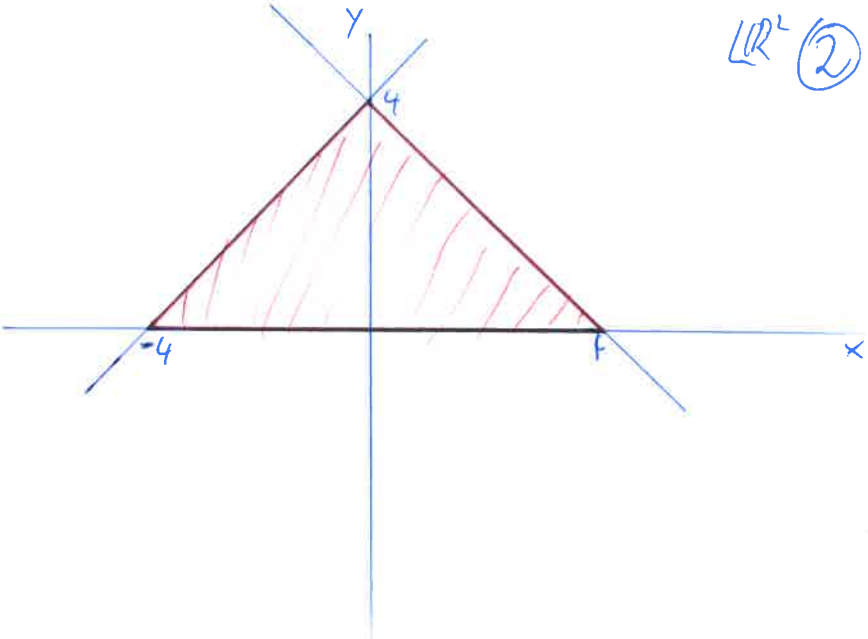
$$= \int_{-1}^{2} dx \left[x^5 - x^3 - 5x^2 - 3x + 2 \right] = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{64}{6} - \cancel{\frac{16}{4}} - \frac{40}{3} - \frac{12}{2} + \cancel{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} + 2$$

$$= \frac{128}{12} - \frac{160}{12} - \frac{72}{12} \underbrace{- \frac{2}{12} + \frac{3}{12} - \frac{20}{12} + \frac{18}{12}}_{-\frac{1}{12}} + \frac{24}{12} = -\frac{81}{12} = -\frac{27}{4}$$

Aufgabe 2

$$A: \begin{cases} y=0 \\ y=4+x \\ y=4-x \end{cases}$$



$f(x,y) = y^3$

$g(x,y) = x^2 y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy$

Parametrize boundaries:

$$\int_0^4 dy \int_{y-4}^{4-y} dx\,(2xy-3y^2) = \int_0^4 dy\, 2y \underbrace{\cancel{\left(\frac{(4-y)^2}{2} - \frac{(y-4)^2}{2}\right)}}_{=0} - \int_0^4 dy\, 3y^2 [\underbrace{4-y-y+4}_{-2y+8}]$$

$$= -\int_0^4 dy\, 3y^2(-2y+8) = -\int_0^4 dy\,(-6y^3+24y^2) = \left[3\cancel{6}\frac{y^4}{2\cancel{4}} - 8\cancel{24}\frac{y^3}{\cancel{3}}\right]\Bigg|_0^4$$

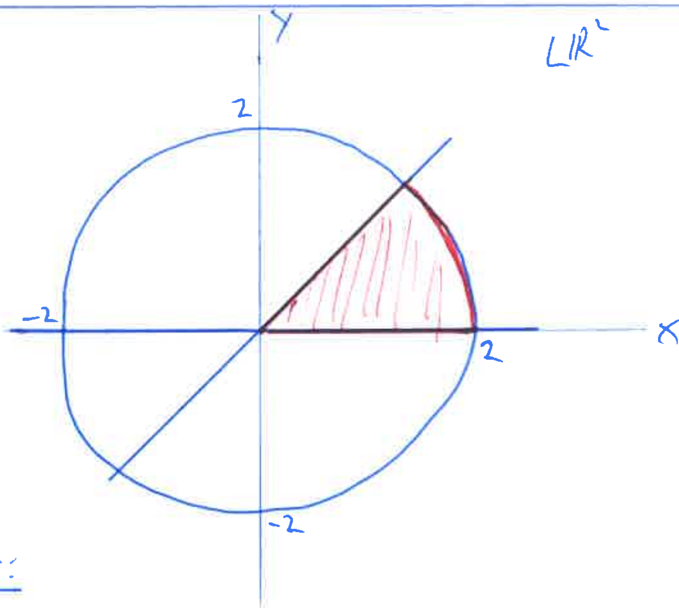
$$= 3\cdot 128 - 8\cdot 64 = 384 - 512 = \underline{\underline{-128}}$$

Aufgabe 3

LR^2

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ x^2+y^2 \le 4\}$

$\rightarrow \underline{\underline{r \in [0,2],\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]}}$



$f(x,y) = 3x^3y + xy^3$

$g(x,y) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3 + 3xy^2$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$

Polar coords:

$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$, $\frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow 3r^3\cos^3\varphi + 3r^3\cos\varphi\sin^2\varphi$
$= 3r^3\cos\varphi\,(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})$

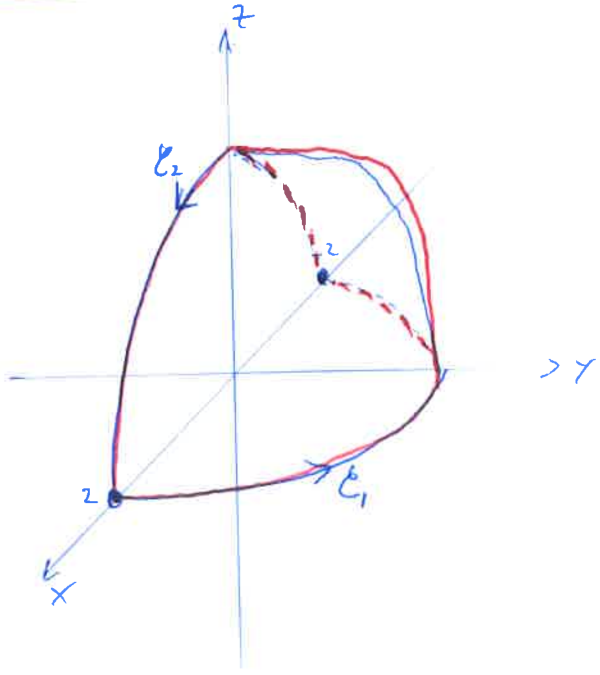
$$\Rightarrow -\int_0^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\, 3r^4 \cos\varphi = \frac{3}{5}32 \sin\vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{96}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{48}{5}\sqrt{2}}} \approx -13{,}5765$$

Aufgabe 4

Stoke's theorem

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2+z \\ x-y \\ yz \end{pmatrix}$$



Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \hat{n}\, dA = \oint_{\partial S} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz)$$

Here: $\oint_{\partial S} [(x^2+z)\, dx + (x-y)\, dy + yz\, dz]$

$\underline{\underline{C_1:}}$ $+2 \le x \le -2\,, \quad y = 4 - x^2, \quad z = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{dy = -2x\, dx}}, \quad \underline{\underline{dz = 0}}$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} [x^2 dx + (x - 4 + x^2)(-2x)\, dx] = \int_{+2}^{-2} dx\, [x^2 - 2x^2 + 8x - 2x^3]$$

$$= \int_{+2}^{-2} dx\, [-2x^3 - x^2 + 8x] = \left[\cancel{\frac{x^4}{2}} + \frac{x^3}{3} - \cancel{4x^2} \right]_{+2}^{-2} = +\frac{8}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

$\underline{\underline{C_2:}}$ $-2 \le x \le +2\,, \quad z = 4 - x^2, \quad y = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{dz = -2x\, dx}}, \quad \underline{\underline{dy = 0}}$$

$$\rightarrow \int_{C_2} dx\, [x^2 + 4 - x^2] = \int_{-2}^{+2} dx\, 4 = 4x \Big|_{-2}^{+2} = +8 + 8 = \underline{\underline{+16}}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial S} \vec{F} ds = +\frac{16}{3} + 16 = \underline{\underline{+\frac{64}{3}}}$$

Aufgabe 5

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

Stokes Theorem:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \vec{n} \, dA = \oint_{\partial S} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} [z dx - z dy + y dz]$$

$$\mathcal{C}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\underline{\underline{dx = -2\sin t \, dt}} \\ &\underline{\underline{dy = 2\cos t \, dt}} \\ &\underline{dz} = (\cos^2 t - \sin^2 t) dt \\ &\quad \underline{\underline{= (2\cos^2 t - 1) dt}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} [\overbrace{\sin t \cos t}^{z(t)} \overbrace{(-2\sin t \, dt)}^{dx} - \overbrace{\sin t \cos t}^{z(t)} \overbrace{2\cos t \, dt}^{dy} + \overbrace{2\sin t}^{y(t)} \overbrace{(2\cos^2 t - 1) dt}^{dz}]$$

$$= \int_0^{2\pi} dt [-2\sin^2 t \cos t - 2 \sin t \cos^2 t + 4 \sin t \cos^2 t - \underbrace{\cancel{2\sin t}}_{=0}]$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} dt [\sin^2 t \cos t] - 2 \int_0^{2\pi} dt [\sin t \cos^2 t] + 4 \int_0^{2\pi} dt [\sin t \cos^2 t]$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} dt \sin t \cos^2 t = \left| \begin{aligned} u &= \cos t \\ du &= -\sin t \, dt \\ 0 &\to 1 \\ 2\pi &\to 1 \end{aligned} \right| = -\int_1^1 du \, u^2 = 0, \quad \int_0^{2\pi} dt \cos t \sin^2 t = 0 \right|$$

$$= \underline{\underline{0}}$$