Uni Graz
TU Graz

S. Kofler, A. Windisch
M. Holzmann, J. Rohleder, M. Zank

Vektoranalysis (für PhysikerInnen)

SS 2014

5. Übungsblatt

8. April

Aufgabe 1
Es sei B die Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius 5. Berechnen Sie

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2 dxdydz.$$

Aufgabe 2
Berechnen Sie für beliebige positive Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\iiint_E \sqrt{1-\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}}dxdydz \quad \text{mit} \quad E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\le 1\right\}.$$

Aufgabe 3
Die Koordinaten des Schwerpunktes (x_s, y_s) eines Drahtstücks von der Gestalt der Kurve C und mit der Dichte $\varrho(x,y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m}\int_C x\,\varrho(x,y)\,ds\,, \quad y_s = \frac{1}{m}\int_C y\,\varrho(x,y)\,ds$$

wobei

$$m = \int_C \varrho(x,y)\,ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet. Man berechne den Schwerpunkt für den Fall, dass die Kurve C den Halbkreis

$$x^2+y^2=1\,, \quad y\le 0,$$

beschreibt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x,y) = 1-y$.

Aufgabe 4
Berechnen Sie das vektorielle Kurvenintegral $\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{x}$ in den folgenden beiden Fällen.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y, -x)$ und C ist parametrisiert durch $\vec{x}(t) = (t, t^2, t^3)$ mit $0\le t\le 1$;

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (x+y, xy, y)$ und C ist gegeben durch $\vec{x}(t) = (e^t, e^{-t}, 2e^{2t})$ mit $0\le t\le 1$.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds $\vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, -z)$ durch die Oberfläche des geraden Kreiskegels

$$K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Lösungen zum 5. Übungsblatt aus Vektoranalysis SS14

A. Windisch

Aufgabe 1

$B: \quad S^3, \; r = 5$

$\Rightarrow \quad r^2 = x^2+y^2+z^2$

Use spherical coordinates: $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\Rightarrow \iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2 dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{5} r^6 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \underbrace{2\pi}_{\int_0^{2\pi} d\varphi} \underbrace{\left[\overbrace{\underbrace{-\cos(\pi)}_{1} + \underbrace{\cos(0)}_{1}}^{2}\right]}_{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta} \left.\frac{r^7}{7}\right|_0^5 = \frac{4\pi}{7} \cdot 5^7 = \underline{\underline{\frac{312500\,\pi}{7}}}$$

Aufgabe 2

Parametrise ellipsoid by spherical coordinates

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a}\, r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= \sqrt{b}\, r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \sqrt{c}\, r \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} r &\in [0,1] \\ \vartheta &\in [0,\pi] \\ \varphi &\in [0,2\pi) \end{aligned}$$

Jacobian:

$$dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \sqrt{a} \sin\vartheta \cos\varphi & \sqrt{a}\, r \cos\vartheta \cos\varphi & -\sqrt{a}\, r \sin\vartheta \sin\varphi \\ \sqrt{b} \sin\vartheta \sin\varphi & \sqrt{b}\, r \cos\vartheta \sin\varphi & \sqrt{b}\, r \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sqrt{c} \cos\vartheta & -\sqrt{c}\, r \sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \cos^2\vartheta \cos^2\varphi \sin\vartheta + \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \sin\vartheta$$
$$+ \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \sin^3\vartheta \cos^2\varphi + \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \sin\vartheta = \%$$

$$\% = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 [\cos^2\vartheta \cos^2\varphi \sin\vartheta + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \sin\vartheta + \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \sin\vartheta + \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \sin\vartheta]$$

$$= \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \sin\vartheta [\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta] = \underline{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \sin\vartheta}$$

$$\Rightarrow \quad dx\,dy\,dz = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{\cancel{a}}\cancel{a} r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi - \frac{1}{\cancel{b}}\cancel{b} r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi - \frac{1}{\cancel{c}}\cancel{c} r^2 \cos^2\vartheta}$$

$$= \sqrt{1 - r^2 [\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta]} = \underline{\underline{\sqrt{1-r^2}}}$$

$$\Rightarrow \iiint_E \sqrt{1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c}}\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1-r^2}\, \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, r^2 \sin\vartheta$$

$$= \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^1 dr \sqrt{1-r^2}\, r^2 = \left| \begin{array}{l} r = \cos u \\ dr = -\sin u\, du \\ 0 \rightarrow \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \\ 1 \rightarrow \arccos(1) = 0 \end{array} \right|$$

$$= 4\pi \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \sin^2 u \cos^2 u = \left| \begin{array}{l} \sin^2 u \cos^2 u = (\sin u \cos u)^2 \\ = |\sin 2x = 2 \sin x \cos x| = \frac{\sin^2 2u}{4} \\ = |\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)| = \frac{1}{8}(1 - \cos 4u) \end{array} \right|$$

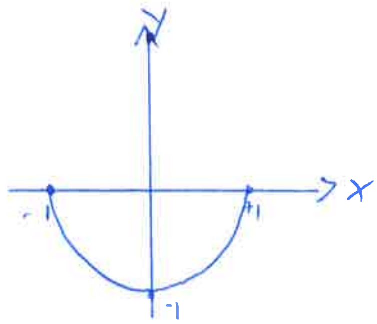
$$= 4\pi\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du [1 - \cos 4u] = \cancel{4}\pi \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, \frac{1}{{}_2\cancel{8}} \frac{\pi}{2} - \underbrace{\cancel{4\pi\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\, \frac{1}{8}\frac{1}{4} \sin 4u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}}_{=0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi^2 \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}{4}}}$$

Aufgabe 3 $\quad C, \ \varrho(x,y)$

$$x_s = \frac{1}{m}\int_C x\varrho(x,y)\,ds \qquad y_s = \frac{1}{m}\int_C y\varrho(x,y)\,ds$$

$$m = \int_C \varrho(x,y)\,ds$$



Here: $\varrho(x,y) = 1-y$

$C: \ x^2+y^2=1, \quad y \leq 0$

Use polar coordinates:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Restrict to C: $\quad r=1, \ \varphi \in [\pi, 2\pi]$

Density: $\quad \varrho(r,\varphi) = 1-\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad m = \int_\pi^{2\pi} (1-\sin\varphi)\,d\varphi = \pi + \cos\varphi\Big|_\pi^{2\pi} = \underline{\underline{\pi+2}}$$

coords. of center of gravity:

$$X_s = \frac{1}{\pi+2}\int_\pi^{2\pi} \cos\varphi(1-\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi+2}\Big[\underbrace{\cancel{\sin\varphi\Big|_\pi^{2\pi}}}_{=0} - \int_\pi^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\Big]$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \cos\varphi \\ du = -\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{-du}{\sin\varphi} \\ \pi \rightarrow -1 \qquad 2\pi \rightarrow +1 \end{array} \right| = \frac{1}{\pi+2}\int_{-1}^{1} u\,du = \frac{1}{2(\pi+2)}u^2\Big|_{-1}^{1} = \underline{\underline{0}}$$

$$Y_s = \frac{1}{\pi+2}\int_\pi^{2\pi}\sin\varphi(1-\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi+2}\Big[\underbrace{-\cos\varphi\Big|_\pi^{2\pi}}_{-2} - \int_\pi^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\Big]$$

$$\int_\pi^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\Big[\pi - \int_\pi^{2\pi}\cos(2\varphi)\,d\varphi\Big] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\underbrace{\cancel{\sin(2\varphi)\Big|_\pi^{2\pi}}}_{=0} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

[Use: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ to rewrite integrand]

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y_s = \frac{1}{\pi+2}\left[-2-\frac{\pi}{2}\right]}} \sim -0.69$$

Aufgabe 4

$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{x} = ?$$

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (xy,\, y,\, -x)$

C: $\vec{x}(t) = (t, t^2, t^3)\,, \quad 0 \leq t \leq 1.$

$$\Rightarrow \vec{F}(t) = (t^3, t^2, -t)$$

$$d\vec{x} = (1, 2t, 3t^2)\,dt$$

$$\int_0^1 dt\,(t^3, t^2, -t)\cdot(1, 2t, 3t^2) = \int_0^1 dt\,[t^3+2t^3-3t^3] = \underline{\underline{0}}$$

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (x+y,\, xy,\, y)$

C: $\vec{x}(t) = (e^t, e^{-t}, 2e^{2t}), \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow \vec{F}(t) = (2\cosh t,\, 1,\, e^{-t})$$

$$d\vec{x} = (e^t, -e^{-t}, 4e^{2t})$$

$$\int_0^1 dt\,(e^t+e^{-t}, 1, e^{-t})\cdot(e^t, -e^{-t}, 4e^{2t}) = \int_0^1 dt\,[e^{2t}+1-e^{-t}+4e^t]$$

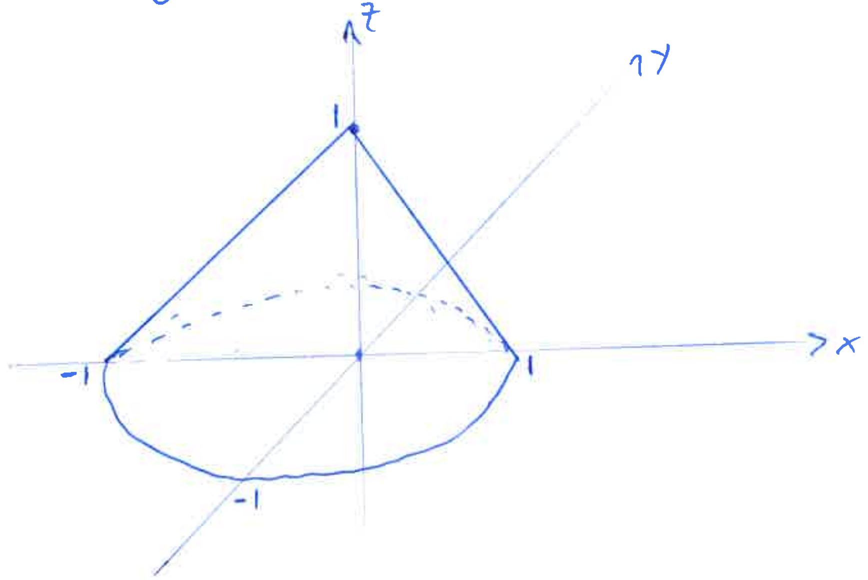
$$= \left[\frac{1}{2}e^{2t}+t+e^{-t}+4e^t\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 \cancel{+1} + e^{-1} + 4e - \frac{1}{2} \cancel{-1} - 4$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}e^2 + 4e - \frac{9}{2} + e^{-1}}}$$

Aufgabe 5

$$\vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, -z)$$

cone: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$



Flux Φ: $\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$

$\Rightarrow$ Divergence theorem $\Rightarrow$ $\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$

Use cylindrical coords:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

Parametrise r boundaries in terms of z:

$r \in [1, 1-z]$
$\varphi \in [0, 2\pi)$
$z \in [0, 1]$

Jacobian: $dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (xz, yz, -z) = z + z - 1 = \underline{\underline{2z-1}}$$

Flux:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{1-z} dr\, r\,(2z-1)$$

$$= \cancel{2}\pi \int_0^1 dz\, 2z \left[\frac{(1-z)^2}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\right] - \cancel{2}\pi \int_0^1 dz \left[\frac{(1-z)^2}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\right]$$

$$= \pi \int_0^1 dz \left[2z^3 - 4z^2 + \cancel{2z} - \cancel{2z} - z^2 + 2z - \cancel{1} + \cancel{1}\right]$$

$$= \pi \int_0^1 dz \left[2z^3 - 5z^2 + 2z\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + 1\right] = \pi\left[\frac{3}{6} - \frac{10}{6} + \frac{6}{6}\right] = \underline{\underline{-\frac{\pi}{6}}}$$