Ad Aufgabe 14 (Stern-Gerlach-Kaskade) (1)

Was ist das Problem?

Quantenmechanisches System, innerer Freiheitsgrad Spin, Spin $\frac{1}{2}$ hat mögliche Einstellungen $\pm\frac{1}{2}$. Der Zustand nach durchlaufen der kaskadierenden SG-Anordnung soll beschrieben werden.

Was brauchen wir um dieses Problem formalisieren zu können?

Quantenmechanisches Problem $\Rightarrow$ brauchen Hilbertraum der die Theorie aufnimmt. Der Hilbertraum dieses Problemes ist zweidimensional, wir brauchen also auch zwei Basiszustände. Hernach wollen wir uns überlegen, wie ein allgemeiner Zustand in diesem abstrakten Raum aussieht. Haben wir dies letztlich erreicht so sind wir in der Lage dieses Problem zu beschreiben.

Der Spinraum

Jeder messbaren physikalischen Größe entspricht ein Hermitescher Operator (also $A = A^{+}$). Die Eigenvektoren von A bilden eine (ON) Basis im Zustandsraum. Für unser Problem bedeutet dies, dass wir die Komponenten S_x, S_y und S_z von $\vec{S}$ benötigen. Nach Basiswahl wollen wir den allgemeinen Zustand $S_n = \vec{S}\cdot\vec{n}$ beschreiben, dabei ist $\vec{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor.

Zunächst betrachten wir nur die Observable S_z.

Wir wollen der Spinkomponente S_z einen Operator S_z zuordnen (Observable), und die Eigenwerte von S_z sollen $\pm\frac{\hbar}{2}$ sein, wie uns das Experiment zeigt.

Die Eigenwertgleichungen sind dann:

$$S_z |\hat{z},+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |\hat{z},+\rangle$$
$$S_z |\hat{z},-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\hat{z},-\rangle$$

Die Zustände sind orthonormal: (Hermitizität)

$$\langle \hat{z},+|\hat{z},+\rangle = \langle \hat{z},-|\hat{z},-\rangle = 1$$
$$\langle \hat{z},+|\hat{z},-\rangle = 0$$

Der Spinraum $\mathcal{H}_s$ ist zweidimensional und wird von den Zuständen (Eigenvektoren) $|\hat{z},+\rangle$, $|\hat{z},-\rangle$ aufgespannt.
Da die Vektoren eine Basis in $\mathcal{H}_s$ sind, gilt die Vollständigkeitsrelation:

$$|\hat{z},+\rangle\langle +,\hat{z}| + |\hat{z},-\rangle\langle -,\hat{z}| = \mathbb{1}$$

Nun können wir einen beliebigen Vektor im Spinraum $\mathcal{H}_s$ hinschreiben, indem wir eine Superposition der Basisvektoren verwenden:

$$|\psi\rangle = \alpha |\hat{z},+\rangle + \beta |\hat{z},-\rangle$$

Dabei muss gelten:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Da wir nun eine Basis des Hilbertraumes kennen, können wir eine Matrixdarstellung der Operatoren finden.
Insbesondere finden wir für S_z in der $\{|\hat{z},+\rangle, |\hat{z},-\rangle\}$-

Basis offensichtlich:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

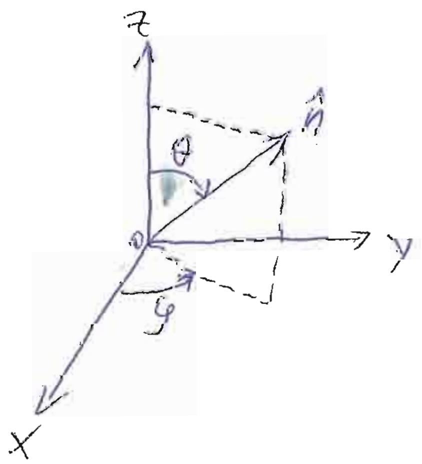
(bzw: 3. Paulimatrix)
$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Nun gibt es ja auch noch die Observablen S_x und S_y. Auch diese müssen sich in der $\{|\hat{z},+\rangle, |\hat{z},-\rangle\}$ Basis ausdrücken lassen, und zwar durch hermitesche 2x2 Matrizen. Hier ohne Beweis (→Kommutatorrelationen, Drehimpuls):

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

Jetzt brauchen wir eine $\vec{S}$-Komponente in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors $\hat{n}$.
Dazu betrachten wir:



Die Komponenten von $S_n = \vec{S}\cdot\hat{n}$ sind dann:

$$S_n = \vec{S}\cdot\hat{n} = S_x\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + S_y\cdot\sin\theta\sin\varphi + S_z\cdot\cos\theta$$

Nun setzen wir die Matrix-darstellungen der Operatoren S_x, S_y und S_z ein:

(4)

$$S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cos\theta$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & \sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -i\sin\theta\sin\varphi\\ i\sin\theta\sin\varphi & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & -\cos\theta\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi - i\sin\varphi)\\ \sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) & -\cos\theta\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi}\\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}}} \qquad (\text{gl. } 1)$$

Nun benötigen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von S_x, S_y, S_z. Für S_z können sie direkt abgelesen werden, für S_x und S_y folgt diese Information durch Lösen der EWPs.

S_x, S_y und S_z besitzen alle die Eigenwerte $+\frac{\hbar}{2}$ und $-\frac{\hbar}{2}$.

(Vgl: Experiment: SG: Drehung der Apparatur)

Die Eigenvektoren von S_x, S_y (~~allg.~~ S_z) notieren wir mit:

$|\hat{x},\pm\rangle$, $|\hat{y},\pm\rangle$, $|\hat{n},\pm\rangle$.

Nun können wir jeden Zustand in Termen von $|\hat{z},\pm\rangle$ schreiben

$$|\hat{x},\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\hat{z},+\rangle \pm |\hat{z},-\rangle]$$

$$|\hat{y},\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\hat{z},+\rangle \pm i|\hat{z},-\rangle]$$

Warum tritt hier der halbe Winkel auf? Gehe zu Seite (5)

und allgemein, wie für unser Problem relevant:

$$|\hat{n},+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2}|\hat{z},+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2}|\hat{z},-\rangle$$

$$|\hat{n},-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2}|\hat{z},+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2}|\hat{z},-\rangle$$

Mit $\varphi = 0$ folgt $\quad |\hat{n},+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\hat{z},+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\hat{z},-\rangle$

$|\hat{n}, -\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|\hat{z}, +\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\hat{z}, -\rangle$ (5)

Diese Zustände brauchen wir für unser Problem.

Warum tritt für S_n der halbe Winkel auf?

Um dies zu klären muss folgendes Teilproblem gelöst werden:

Wir brauchen die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators S_n. Wie für unser Problem relevant betrachten wir hierzu den Fall, dass $\hat{n}$ in der x-z-Ebene liegt (vgl. Blatt Seite (3)), d.h. $\varphi = 0$.

Wir beginnen mit Gleichung (Gl. 1) auf Seite (4):

$S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ +\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, wobei wir $\varphi = 0$ gesetzt haben.

Berechnen nun die Eigenwerte:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda & \frac{\hbar}{2}\sin\theta \\ \frac{\hbar}{2}\sin\theta & -\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{4}(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta + \lambda) - \frac{\hbar^2}{4}\sin^2\theta =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}\cos^2\theta + \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}\sin^2\theta$$

$$= \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1} = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = +\frac{\hbar}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}$$

Nun müssen wir die entsprechenden Eigenvektoren auffinden.

Wir haben nun folgende Eigenwertgleichung für den Eigenwert $+\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$$

Wir suchen die Komponenten des zum Eigenwert $\lambda_1 = +\frac{\pi}{2}$ gehörenden Eigenvektors a und b:
Nach Entfernung von $\frac{\pi}{2}$ li u. re haben wir folgendes Gleichungssystem:

$$\text{I} \quad a\cdot\cos\theta + b\cdot\sin\theta = a$$
$$\text{II} \quad a\cdot\sin\theta - b\cdot\cos\theta = b$$

Wir addieren die Gleichungen I und II: I+II:

$$a\cdot(\cos\theta + \sin\theta) + b\cdot(\sin\theta - \cos\theta) = a + b$$

Nun trennen wir a und b auf li. bzw re. Seite:

$$a(\cos\theta + \sin\theta - 1) = b(1 + \cos\theta - \sin\theta)$$

Wir wechseln nun zu halben Winkeln, indem wir folgende trigonometrische Additionstheoreme zur Anwendung bringen:

$$\text{(Gl.2)} \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$\text{(Gl.3)} \quad \cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$\text{(Gl.4)} \quad \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

Betrachten Linke Seite:

$$a(\underbrace{\cos\theta}_{\text{(Gl.3)}} + \underbrace{\sin\theta}_{\text{(Gl.2)}} \underbrace{-1}_{\text{(Gl.4)}}) = a\left(\cancel{\cos^2\frac{\theta}{2}} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cancel{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= a\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = a\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right]$$

Betrachten rechte Seite:

$$b\,(\underset{(Gl.4)}{1}+\underset{(Gl.3)}{\cos\theta}-\underset{(Gl.2)}{\sin\theta}) = b\left(\cancel{\sin^2\tfrac{\theta}{2}}+\cos^2\tfrac{\theta}{2}+\cos^2\tfrac{\theta}{2}-\cancel{\sin^2\tfrac{\theta}{2}}-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\right)=$$

$$= b\left(2\cos^2\tfrac{\theta}{2}-2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\right) = \underline{\underline{b\cdot 2\cos\tfrac{\theta}{2}\left[\cos\tfrac{\theta}{2}-\sin\tfrac{\theta}{2}\right]}}$$

Nun setzen wir die linke gleich der rechten Seite:

$$a\cancel{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\,\cancel{\left[\cos\tfrac{\theta}{2}-\sin\tfrac{\theta}{2}\right]} = b\cancel{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\cancel{\left[\cos\tfrac{\theta}{2}-\sin\tfrac{\theta}{2}\right]}$$

$$a\cdot\sin\tfrac{\theta}{2} = b\cdot\cos\tfrac{\theta}{2}$$

Nun sind wir beinahe am Ziel.
Wir nutzen die Normierungsbedingung $|a|^2+|b|^2=1$:
Wir wählen: $a=\cos\frac{\theta}{2}$, $b=\sin\frac{\theta}{2}$
Die Normierungsbedingung folgt zwangsläufig mit (Gl. 4)

Der erste Eigenvektor ist also:

$$|\hat{n},+\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$ bzw. können wir nun schreiben:

$$|\hat{n},+\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{|\hat{z},+\rangle} + \sin\tfrac{\theta}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{|\hat{z},-\rangle} = \underline{\underline{\cos\tfrac{\theta}{2}|\hat{z},+\rangle+\sin\tfrac{\theta}{2}|\hat{z},-\rangle}}$$

Analoges Vorgehen liefert für $|\hat{n},-\rangle$:

$$|\hat{n},-\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix};$$

$$|\hat{n},-\rangle = -\sin\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\cos\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{-\sin\tfrac{\theta}{2}|\hat{z},+\rangle+\cos\tfrac{\theta}{2}|\hat{z},-\rangle}}$$