Wellenfunktion (Vgl. Feierband)

(1)

→ Wahrscheinlichkeit ein Teilchen an einer bestimmten Stelle zu finden

→ Dynamik, Entwicklung in der Zeit: Schrödingergleichung

Schrödingergleichung

Welle-Teilchen-Dualismus (e^-, Photonen)

Welle	Teilchen
Interferenz	Compton, Photoeffekt, Planck...
$\omega, \vec{k}$	$E, \vec{p}$

Ferner: Comptoneffekt

$$E = \hbar\omega \quad , \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \qquad (1)$$

→ e^- / Photonen: Nachweis als Teilchen

→ Nachweiswahrscheinlichkeit wie Intensität einer Welle verteilt

⇒ Widerspruch

Deshalb: $\exists$ eine Wahrscheinlichkeitsamplitude, deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Nachweis von Teilchen ist. (WS-Amplitude ψ)

Bewegungsgleichung für Dynamik der Wellenfunktion

Ebene Welle mit $\omega, \vec{k}$: $\quad \exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\}$

Dann folgt für (1):

$$E \cdot \exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\} \Rightarrow$$

$$E = \hbar\omega \checkmark$$

⇒: Energie ⟺ Operation $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

$$\vec{p}\,\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)] = -i\hbar\nabla_r \exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\} \Rightarrow$$ ②

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \checkmark$$

$\Rightarrow$: Impuls $\Longleftrightarrow$ Operation $-i\hbar\vec{\nabla}_r$

Konstruktion der Wellengleichung

Ersetzungsregel (i): $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

Ersetzungsregel (ii): $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}_r$

Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = c^2 p^2$ wird zur Operatorbeziehung:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2\nabla^2 \Rightarrow \text{Forme auf Wellengleichung um} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\vec{r},t) = 0$$

Photonen: Spin 1
e^- : Spin $\frac{1}{2}$
} $\Rightarrow$ mehrkomponentige Wellenfunktionen

Bemerkung:
Massives Teilchen: Energie-Impuls-Beziehung
$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ führt auf die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\Box + m^2c^2/\hbar^2\right)\Psi(\vec{r},t) = 0$$

Hier, in nichtrelativistischer QM, haben wir eine Energie-Impuls-Beziehung $E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r},t)$, mit V Potential.

Setzen ein: Operatorbeziehung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r},t) \Rightarrow$$ Formen um auf Wellengleichung $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r},t)\right)\Psi(\vec{r},t)}}$$

Schrödingergleichung: zeitliche und räumliche Propagation der Wellenfunktion $\Psi(\vec{r},t)$ eines massiven Teilchens im Potential. ($V=0 \rightarrow$ freie SGL)

Brauchen nun einen Detektor. Detektor hat Pixel bei $\vec{r}_i$ mit Volumina δV_i. Die Wahrscheinlichkeit (p_i) das Teilchen im i-ten Pixel zu finden ist proportional zu $|\Psi(\vec{r}_i)|^2$ und zu δV. Normierung folgt mit $\sum_i p_i = 1$, $\delta V_i \rightarrow 0$

$p_i = |\Psi(\vec{r}_i)|^2 \delta V_i$, $\int d^3r \, |\Psi(\vec{r},t)|^2 = 1$

Allgemeines, klassisches System mit f-Freiheitsgraden

Hamiltonfunktion (klassische): $H_{kl}(q_1, \ldots q_f, p_1, \ldots, p_f, t) = H_{kl}(q, p, t)$

Hamiltonfunktion $\Leftrightarrow$ Energie, Ersetzungsregeln:

$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $p_n \rightarrow p_{n,op} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_n}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t) = \underbrace{H_{kl}(q, p_{op}, t)}_{H_{op}}\Psi(q,t)$$ mit Normierung

$$\int dq_1 \cdots dq_f \, |\Psi(q_1, \ldots q_f, t)|^2 = \int d^f q \, \Psi^*(q,t)\Psi(q,t) = 1$$

klassischer Zustand wird durch $q(t), p(t)$ festgelegt, quantenmechanischer Zustand durch Wellenfunktion $\psi(q,t)$. Der Hamilton operator bestimmt die Freiheitsgrade und die Dynamik des Systems.

④