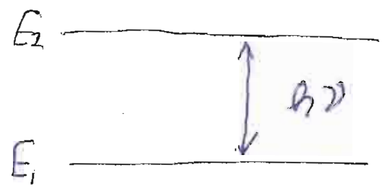
abl 8: Strahlungsformel

Ideen zur Herleitung

Annahme: Licht hat Teilchencharakter, 'Photon', Energie $h\nu$.

Betrachten diskrete Energieniveaus:



$$E_2 - E_1 = h\nu$$

Mögliche Prozesse:

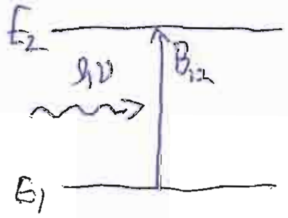
(i) Absorption: ① → ②: e^- wird von ① nach ② gehoben, braucht Energie $h\nu$ aus Strahlungsfeld

(ii) spontane Emission ② → ①: e^- wird spontan von ② nach ① gesendet, emittiert ein $h\nu$

(iii) stimulierte Emission: ② → ①: Einfallendes $h\nu$ erzwingt weitere $h\nu$-Emission: zwei $h\nu$ werden emittiert.
[Bsp: LASER]

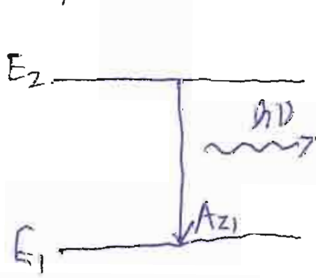
Haben folgende Prozesse:

(i)



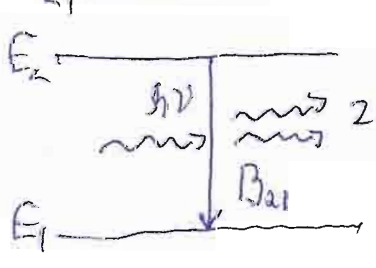
Absorption

(ii)



Emission

(iii)



stimulierte Emission

Wir haben:

N_1 e^- bei E_1, N_2 e^- bei E_2

Gleichgewicht zw. System und Energiedichte $u(\nu)$:

$$\# \frac{\text{Prozesse } ① \to ②}{\text{Zeit}} \stackrel{!}{=} \# \frac{\text{Prozesse } ② \to ①}{\text{Zeit}}$$

(i) Prozesse von ① → ②: Absorptionen

$$\# \frac{\text{Prozesse } ① \to ②}{\text{Zeit}} = B_{12} \cdot u(\nu) \cdot N_1 \quad , \quad B_{12} \ldots \text{Einstein koeff.}$$

(Übergangswahrscheinlichkeit)

(ii) Prozesse von ② → ①: ⇒ spontane Emission
⇒ stimulierte Emission

(a) Einstein koeff. für spontane Emission: A_{21}

(b) Einstein koeff. für stimulierte Emission: B_{21}

Zusammengenommen:

$$\# \frac{\text{Prozesse } ② \to ①}{\text{Zeit}} = A_{21} \cdot N_2 + B_{21} \cdot u(\nu) \cdot N_2$$

Thermisches Gleichgewicht:

$$B_{12} \cdot u(\nu) \cdot N_1 = A_{21} \cdot N_2 + B_{21} \, u(\nu) \cdot N_2$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_{21} + B_{21} \, u(\nu)}{B_{12} \cdot u(\nu)} \quad (*)$$

Boltzmann-Verteilung für Teilchen auf Energieniveaus:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_2/kT}} = e^{(E_2 - E_1)/kT} = e^{h\nu/kT} \quad (**)$$

$(*) = (**)$:

$$\frac{A_{21} + B_{21} \, u(\nu)}{B_{12} \cdot u(\nu)} = e^{h\nu/kT}$$

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} \, e^{h\nu/kT} - B_{21}}$$

Grenzbetrachtungen:

Für $T \to \infty$: Energiedichte $u(\nu) \to \infty$

Deshalb:

$$\lim_{T\to\infty} u(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{A_{21}}{B_{12}\cdot e^{h\nu/kT} - B_{21}} = \infty \Rightarrow$$

$$\lim_{T\to\infty} \left(B_{12}\cdot e^{h\nu/kT} - B_{21}\right) = 0$$

$$\lim_{T\to\infty} \left(B_{12}\cdot e^{h\nu/kT} - B_{21}\right) = B_{12} - B_{21} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B_{12} = B_{21}}}$$

Einsetzen: $$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}\cdot\left(e^{h\nu/kT} - 1\right)}$$

Wir entwickeln aus und brechen Reihe ab (kleine Frequenzen)

$$e^{h\nu/kT} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^{\mu} \frac{1}{\mu!} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\right)$$

Einsetzen:

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \cdot \frac{1}{\left(\cancel{1} + \frac{h\nu}{kT} - \cancel{1}\right)} = \frac{A_{21}}{B_{12}} \cdot \frac{kT}{h\nu}$$

Rayleigh-Jeans: $$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cancel{kT} = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{\cancel{kT}}{h\nu} \Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3}$$

$\Rightarrow$: Planck'sche Strahlungsformel:

$$\underline{\underline{u(\nu) = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{1}{\left(e^{h\nu/kT} - 1\right)}}}$$