

Karl-Franzens Universität Graz
Institut für Physik

Vortrag

Quantenmechanischer Messprozess und Zeno-Effekt

Erstellt im Rahmen der Lehrveranstaltung *Offene Quantensysteme*
(M. Wenin)

von

Markus Hopper
Andreas Windisch

Graz, am 19. Jänner 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Anmerkung	2
2	Der quantenmechanische Messprozess	3
2.1	Die ideale Messung	3
2.2	Operations und Effects	4
2.3	Darstellungs-Theorem für Quantum Operations	6
2.4	Quanten Messung und Entropie	9
2.5	Approximative Messungen	11
2.6	Indirekte Quanten Messungen	12
2.7	Quantum Non-Demolition Measurements (QND)	17
3	Der Quanten-Zeno-Effekt	19
4	Die Dichtematrixgleichung	19
A	Zerfall eines 2-Niveau-Systems	23

1 Anmerkung

Im ersten Teil wird der Gegenstand des quantenmechanischen Messprozesses ausgearbeitet. Ferner wird auch auf '*Quantum Non-Demolition Measurement*' eingegangen. Der zweite Teil beschäftigt sich mit dem Zeno-Effekt. Als Quelle und Grundlage für diese Ausarbeitung wurde [1] herangezogen. Der erste Teil wurde von Andreas Windisch bearbeitet, während Markus Hopfer den zweiten erstellte. Der Rahmen für diese Ausarbeitung ist der Vortrag für die Lehrveranstaltung 'Offene Quantensysteme' von M. Wenin, gelesen im WS09/10.

Markus Hopfer

Andreas Windisch

2 Der quantenmechanische Messprozess

In diesem Abschnitt soll der quantenmechanische Messprozess beleuchtet werden. Der Messprozess spielt eine duale Rolle in der Quantenmechanik: Einerseits beschreibt er die Veränderung eines Zustandes des Quantensystems aufgrund der Messung, dh. er beeinflusst das Verhalten des Systems zu einem späteren Zeitpunkt. Andererseits kann der Messprozess dazu verwendet werden ein System in einen bestimmten Zustand zu präparieren.

2.1 Die ideale Messung

Das grundlegende Postulat für die quantenmechanische Messung kann wie folgt formuliert werden: Sei B eine Eigenschaft mit zugehörigem Projektionsoperator $E(B)$, welche in einem quantenstatistischen Ensemble ϵ gemessen wird, welches durch eine Dichtematrix ρ beschrieben wird.

$$\rho' = \frac{E(B)\rho E(B)}{\text{tr}\{E(B)\rho E(B)\}} \quad (2.1)$$

beschreibt das Subensemble ϵ' , bestehend aus jenen Systemen für die die Eigenschaft B für wahr befunden wurde. Der Nenner von (2.1) stellt die Normierung von ρ' sicher, $\text{tr}\rho' = 1$. Dies ist gerade die Wahrscheinlichkeit die zu messende Eigenschaft vorzufinden:

$$P(B) = \text{tr}\{E(B)\rho E(B)\} = \text{tr}\{E(B)\rho\}. \quad (2.2)$$

Wenn wir einen selbstadjungierten Operator \hat{R} nehmen, so kann B etwa als Borel-Menge auf \mathbb{R} verstanden werden und das entsprechende Ereignis, dass die Zufallsvariable R einen Wert in B annimmt. Der Projektionsoperator $E(B)$ ist in Termen der Spektralfamilie von R definiert, dh.

$$E(B) = \int_B dE_r. \quad (2.3)$$

Ein Beispiel etwa wäre die orthogonale Zerlegung der Einheit durch die Projektoren ΔE_α . Dazu eine kurze Betrachtung zur Spektralzerlegung:

Für jede stetige Funktion $f(r)$ kann man eine operatorwertige Funktion $f(\hat{R})$ in Termen der Spektralzerlegung finden:

$$f(\hat{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)dE_r. \quad (2.4)$$

Es existiert eine orthogonale Zerlegung der Einheit. Dazu betrachtet man disjunkte Partitionen der reellen Achse in Intervallen $\Delta r_\alpha = (r_{\alpha-1}, r_\alpha]$, und definiert entsprechende Projektoren:

$$\Delta E_\alpha = E_{r_\alpha} - E_{r_{\alpha-1}}. \quad (2.5)$$

Man kann zeigen dass folgende Vollständigkeitsrelation gilt:

$$\sum_{\alpha} \Delta E_\alpha = \mathbb{1}. \quad (2.6)$$

Für unser Beispiel bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $R \in \Delta r_\alpha$ dann gegeben ist durch:

$$P(\Delta r_\alpha) = \text{tr}\{\Delta E_\alpha \rho\}, \quad (2.7)$$

das diesem Ereignis entsprechende Subensemble wird durch folgende Dichtematrix beschrieben:

$$\rho'_\alpha = \frac{1}{P(\Delta r_\alpha)} \Delta E_\alpha \rho \Delta E_\alpha. \quad (2.8)$$

Mit (2.6) ist die Wahrscheinlichkeit $P(\Delta r_\alpha)$ auf 1 normiert:

$$\sum_{\alpha} P(\Delta r_\alpha) = 1. \quad (2.9)$$

Die Dichtematrizen der Subensembles sind orthogonal im Sinne von $\rho'_\alpha \rho'_\beta = \delta_{\alpha\beta} \rho'_\beta$. Die Messung einer orthogonalen Zerlegung ΔE_α der Einheit führt also auf eine Zerlegung des ursprünglichen Ensembles ϵ in Subensembles, welche mit dem Index α 'gelabelt' sind. So ein Aufteilen des originalen Ensembles in Subensembles, jedes mit einem bestimmten Messausgang identifiziert, nennt man *selektive Messung*.

Man kann sich natürlich auch ein Experiment vorstellen, in dem die Subensembles nach der Messung mit ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit vermischt werden. Das resultierende Ensemble ist dann durch eine Dichtematrix beschrieben, die von folgender Gestalt ist:

$$\rho' = \sum_{\alpha} P(\Delta r_{\alpha}) \rho'_{\alpha} = \sum_{\alpha} \Delta E_{\alpha} \rho \Delta E_{\alpha}. \quad (2.10)$$

Das neue Vermischen der Subensembles nach der Messung nennt man *nicht-selektive Messung*. Ein weiteres Beispiel: Sei \hat{R} ein selbstadjungierter Operator mit einem diskreten, möglicherweise entarteten Spektrum. Die Dichtematrix sei $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Die Wahrscheinlichkeit für die Messung eines diskreten Eigenwertes r_n , dh. für das Ereignis $R = r_n$ mit dem entsprechenden Projektionsoperator Π_n , ist gegeben durch

$$P(r_n) = \text{tr}\{\Pi_n \rho\} = \langle\psi|\Pi_n|\psi\rangle. \quad (2.11)$$

Das entsprechende Subensemble wird durch die Dichtematrix

$$\rho'_n = \frac{\Pi_n |\psi\rangle\langle\psi| \Pi_n}{P(r_n)} = |\Phi\rangle\langle\Phi| \quad (2.12)$$

beschrieben, was impliziert dass das gemessene Subensemble durch den normierten Zustandsvektor

$$\Phi = P(r_n)^{-\frac{1}{2}} \Pi_n \psi \quad (2.13)$$

beschrieben werden kann. Das Subensemble ist also wieder ein Reinzustand. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, etwa wenn die Dichtematrix zu Beginn gemischt ist. Wenn der Eigenwert r_n nicht entartet ist, mit Projektion $\Pi_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, dann führt die Messung auf ein Subensemble welches auch dann noch als ein Reinzustand Φ beschrieben werden kann, wenn ρ gemischt ist ($\Phi = \Psi_n$ mit Wahrscheinlichkeit $P(r) = \langle\psi_n|\rho|\psi_n\rangle$).

Abschließend betrachten wir noch den Ortsoperator Q . Wir nehmen an dass eine ideale Messung des Ereignisses $Q \in \Delta \equiv (a, b]$, also die Koordinate im Intervall $(a, b]$ aufzufinden, auf dem Ensemble ϵ ausgeführt wird, ϵ beschrieben durch $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist

$$P(\Delta) = \text{tr}\{E(\Delta)\rho\} = \int_a^b dx |\psi(x)|^2, \quad (2.14)$$

und das zugehörige Subensemble wird durch den Reinzustand $\rho' = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ beschrieben, mit

$$\Phi(x) = \begin{cases} P(\Delta)^{-\frac{1}{2}} \psi(x), & a < x \leq b \\ 0, & x \leq a, x > b \end{cases} \quad (2.15)$$

als neue Wellenfunktion nach der Messung.

2.2 Operations und Effects

Es ist wichtig zu betonen, dass im letzten Abschnitt *ideale* Messungen der Projektion $E(\Delta)$ beschrieben wurden. $E(\Delta)$ wurde aus der kontinuierlichen Spektralfamilie E_q des Ortsoperators \hat{Q} abgeleitet. Nun muss man jedoch davon ausgehen, dass man nicht die reine Spektralfamilie E_q vermisst, sondern nur eine Näherung, da ja die endliche Auflösung des Detektors zu berücksichtigen ist. Tatsächlich gibt es eine Vielzahl von Varianten der Messungen. Es zeigt sich in diesem Kontext, dass die verallgemeinerte Theorie der Messung basierend auf Operations und Effects ein sehr hilfreiches Konzept darstellt.

Wir wollen eine Messung betrachten, die eine Menge M von möglichen Ausgängen $m \in M$ besitzt. Man denke etwa an einen klassischen Stichprobenraum M und die möglichen Elementarereignisse m . Der Einfachheit halber wollen wir annehmen M sei diskret. Die Messung erfolgt auf einem quanten-statistischen Ensemble, welches durch eine Dichtematrix ρ beschrieben wird. Die allgemeine Theorie des Messprozesses basiert auf den folgenden Konzepten und ist auch in Abbildung 1 dargestellt.

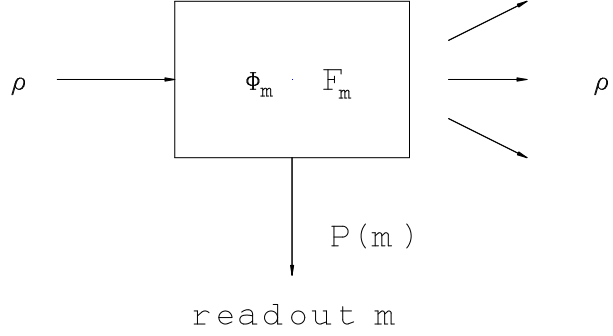


Abbildung 1: Illustration des Messprinzips

1. Der Ausgang der Messung m ist eine klassische Zufallszahl mit Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(m) = \text{tr}\{F_m\rho\}, \quad (2.16)$$

mit F_m ein positiver Operator der *effect* genannt wird. Er genügt der Normierungsbedingung

$$\sum_{m \in M} F_m = \mathbb{1}, \quad (2.17)$$

so dass $P(m)$ ebenfalls normiert ist, dh.

$$\sum_{m \in M} P(m) = 1. \quad (2.18)$$

2. Falls die Messung eine selektive Messung ist, dann ist das Subensemble dieser Systeme für die der Ausgang m gefunden wurde durch folgende Dichtematrix beschrieben:

$$\rho'_m = P(m)^{-1}\Phi_m(\rho) \quad (2.19)$$

Dabei ist $\Phi_m = \Phi_m(\rho)$ ein positiver Superoperator, den man *operation* nennt. Er bildet einen positiven Operator auf einen positiven Operator ab. Φ_m erfüllt darüberhinaus die Konsistenzbedingung

$$\text{tr}\Phi_m(\rho) = \text{tr}\{F_m\rho\}. \quad (2.20)$$

Zusammen mit Gleichung (2.16) erhalten wir dann die Normierung der Dichtematrix:

$$\text{tr}\rho'_m = P(m)^{-1}\text{tr}\Phi_m(\rho) = 1. \quad (2.21)$$

3. Für eine nicht-selektive Messung erhalten wir die Dichtematrix

$$\rho' = \sum_{m \in M} P(m)\rho'_m = \sum_{m \in M} \Phi_m(\rho). \quad (2.22)$$

Die Normierung folgt mit (2.20) und (2.17).

$$\text{tr}\rho' = \sum_{m \in M} \text{tr}\Phi_m(\rho) = \sum_{m \in M} \text{tr}\{F_m\rho\} = \text{tr}\rho = 1. \quad (2.23)$$

Die vorher betrachtete, idealisierte Messung (Neumann-Lüders scheme) ist ein Spezialfall dieses allgemeineren Konzeptes: Nimmt man die orthogonale Zerlegung der Einheit ΔE_α und M als die Menge der Intervalle Δr_α dieser Zerlegung, so finden wir den Ausgang $m = \Delta r_\alpha$, den effect $F_m = \Delta E_\alpha$ und die operation $\Phi_m(\rho) = \Delta E_\alpha \rho \Delta E_\alpha$. Die Vollständigkeitsrelation (2.6) garantiert uns darüberhinaus, dass (2.17) erfüllt ist, während (2.20) aus dem Umstand folgt, dass die ΔE_α Projektionsoperatoren sind.

Eine Verallgemeinerung dieses Beispielles findet man in der Betrachtung der operation

$$\Phi_m(\rho) = \Omega_m \rho \Omega_m^\dagger, \quad (2.24)$$

und der entsprechende effect ist

$$F_m = \Omega_m^\dagger \Omega_m, \quad (2.25)$$

wobei die Ω_m lineare Operatoren im zugrundeliegenden Hilbertraum sind, die der Normierungsbedingung

$$\sum_{m \in M} F_m = \sum_{m \in M} \Omega_m^\dagger \Omega_m = \mathbb{1} \quad (2.26)$$

genügen. Bei der idealen Messung haben wir ein projektorwertiges Maß das jedem Messausgang $m = \Delta r_\alpha$ einen Projektionsoperator $F_m = \Delta E_\alpha$ zuordnet. Das vorgestellte Konzept führt auf den allgemeineren Begriff des *positive operator valued measure*, wobei jedem Messausgang m ein positiver Operator $F_m = \Omega_m^\dagger \Omega_m$ zugeordnet wird.

2.3 Darstellungs-Theorem für Quantum Operations

In der Praxis ist es oft hilfreich mit einer expliziten Darstellung von der operation Φ_m zu arbeiten. So ist eine Darstellung etwa durch ein Theorem gegeben, welches auf Kraus zurückgeht (1983). Zunächst werden die drei Bedingungen die dem Theorem zugrunde liegen angegeben, dann folgt eine Beweisskizze.

Wir betrachten eine Kollektion positiver Abbildungen $\Phi_m(\rho)$. Das Label m steht für den entsprechenden Messausgang einer generalisierten Messung. Jede dieser Abbildungen muss die folgenden 3 Bedingungen erfüllen:

1. Da wir bestrebt sind $P(m) = \text{tr} \Phi_m(\rho)$ als die Wahrscheinlichkeit für einen Messausgang m zu interpretieren fordern wir zunächst

$$0 \leq \text{tr} \Phi_m(\rho) \leq 1. \quad (2.27)$$

2. Die Abbildung Φ_m muss konvex linear sein, dh. für jede Kollektion von Dichtematrizen ρ_i und nichtnegative Zahlen $p_i \geq 0$ mit $\sum_i p_i = 1$ fordern wir

$$\Phi_m\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_i p_i \Phi_m(\rho_i). \quad (2.28)$$

Diese Bedingung kann mittels des Theorems von Bayes motiviert werden. Vgl.: Bayes's Theorem:

$$\mu(A_1|A_2) = \mu(A_2|A_1) \frac{\mu(A_1)}{\mu(A_2)}. \quad (2.29)$$

Wir interpretieren $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ als ein Ensemble welches durch Präparieren der Zustände ρ_i mit den Wahrscheinlichkeiten p_i erhalten wurde. Wir erwarten dann dass gilt:

$$\frac{\Phi_m(\rho)}{\text{tr} \Phi_m(\rho)} = \sum_i p(i|m) \frac{\Phi_m(\rho_i)}{\text{tr} \Phi_m(\rho_i)}. \quad (2.30)$$

Die linke Seite repräsentiert den Zustand der gesamten Mischung unter der Bedingung dass der Ausgang m erfolgte. Die Größe $\Phi_m(\rho_i)/\text{tr} \Phi_m(\rho_i)$ ist der Zustand nach dem der Ausgang

m erfolgt ist, unter der Bedingung dass der Zustand ρ_i präpariert wurde. Der Zustand wird weiters mit der Wahrscheinlichkeit $p(i|m)$, dh. mit der Wahrscheinlichkeit dass der Zustand ρ_i präpariert wurde, unter der Voraussetzung dass Ausgang m eingetreten ist, multipliziert, dh. unter der Bedingung dass die operation Φ_m auf den Zustand gewirkt hat. Mit der Anwendung von Bayes's Theorem (2.29) erhalten wir:

$$p(i|m) = p(m|i) \frac{p_i}{\text{tr}\Phi_m(\rho)} = \text{tr}\Phi_m(\rho_i) \frac{p_i}{\text{tr}\Phi_m(\rho)}, \quad (2.31)$$

wobei $p(m|i) = \text{tr}\Phi_m(p_i)$ die Wahrscheinlichkeit für den Messausgang m unter der Bedingung dass ρ_i präpariert wurde ist. p_i ist ausserdem die unbedingte Wahrscheinlichkeit für die Präparation von ρ_i , während $\text{tr}\Phi_m(\rho)$ die unbedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ausganges m ist. Setzt man nun (2.31) in (2.30) ein, so findet man (2.28), dh. konvexe Linearität der operation.

3. Schließlich fordern wir absolute Positivität der Abbildung Φ_m . Diese Bedingung ist stärker als nur Positivität und kann wie folgt formuliert werden. Positivität von Φ_m bedeutet, dass $\Phi_m(A)$ positiv ist, für jeden Operator A im Hilbertraum \mathcal{H} . Wir betrachten nun einen zweiten Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}$ beliebiger Dimension D . Wir können dann eine kombinierte operation $\Phi_m \otimes \mathbb{1}$ definieren, welche auf das Tensorprodukt $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ wirkt wie:

$$(\Phi_m \otimes \mathbb{1})\left(\sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha} \Phi_m(A_{\alpha}) \otimes B_{\alpha}. \quad (2.32)$$

Absolute Positivitätserhaltung bedeutet nun nicht nur dass Φ_m positiv ist, sondern auch der kombinierte operation $\Phi \otimes \mathbb{1}$ für alle Dimensionen D , dh. $\Phi_m \otimes \mathbb{1}$ bildet positive Operatoren des zusammengesetzten Systems auf positive Operatoren ab. Physikalisch ist diese Konstruktion sinnvoll, da die zusammengesetzte operation $\Phi_m \otimes \mathbb{1}$ als eine operation verstanden werden kann, welche lokal auf das erste zweier weit getrennter Systeme wirkt ohne das zweite zu beeinflussen.

Das Darstellungstheorem für Quanten Operations besagt nun, dass eine operation Φ_m die drei oben genannten Bedingungen dann und nur dann erfüllt, wenn eine abzählbare Menge von Operatoren Ω_{mk} existiert, so dass die operation geschrieben werden kann als:

$$\Phi_m(\rho) = \sum_k \Omega_{mk} \rho \Omega_{mk}^{\dagger}, \quad (2.33)$$

während der effect der Gleichung

$$F_m = \sum_k \Omega_{mk}^{\dagger} \Omega_{mk} \leq \mathbb{1} \quad (2.34)$$

genügt. Die ist die allgemeinste Form von operation und effect.

Wir wollen den Beweis kurz für endlichdimensionale Räume skizzieren. Nehmen wir an wir hätten eine operation Φ_m die durch Operatoren Ω_{mk} wie in den Gleichungen (2.33) und (2.34) gegeben ist. Dann erfüllt Φ_m die drei geforderten Bedingungen. Zum Beispiel folgt die absolute Positivität von Φ_m unmittelbar, da

$$\langle \phi | (\Omega_{mk} \otimes \mathbb{1}) A (\Omega_{mk}^{\dagger} \otimes \mathbb{1}) | \phi \rangle = \langle \phi_{mk} | A | \phi_{mk} \rangle \geq 0 \quad (2.35)$$

für positive Operatoren A auf $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ und $|\phi_{mk}\rangle \equiv (\Omega_{mk}^{\dagger} \otimes \mathbb{1})|\phi\rangle$. Umgekehrt wollen wir nun annehmen wir haben eine operation Φ_m die die drei Bedingungen erfüllt. Wir wollen die Operatoren Ω_{mk} explizit konstruieren. Wir nehmen einen Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}$ derselben Dimension wie der ursprüngliche Hilbertraum \mathcal{H} , und wählen Orthonormalbasen $\{|\chi_i\rangle\}$ und $\{|\tilde{\chi}_i\rangle\}$ in \mathcal{H} und $\tilde{\mathcal{H}}$. Dann führen wir einen maximal verschränkten Zustand

$$|\phi\rangle \equiv \sum_i |\chi_i\rangle \otimes |\tilde{\chi}_i\rangle, \quad (2.36)$$

ein und definieren den Operator

$$\sigma_m \equiv (\Phi_m \otimes \mathbb{1})(|\phi\rangle\langle\phi|). \quad (2.37)$$

σ_m ist ein Operator im Tensorproduktraum bezüglich des zusammengesetzten Systems. Aufgrund der absoluten Positivität von Φ_m ist dieser Operator positiv, da $|\phi\rangle\langle\phi|$ positiv ist. σ_m hat eine Spektralzerlegung der Form

$$\sigma_m = \sum_k |\phi_{mk}\rangle\langle\phi_{mk}|. \quad (2.38)$$

Die Zustände $|\phi_{mk}\rangle$ sind Zustände des zusammengesetzten Systems und sind im Allgemeinen nicht normiert. Schließlich haben wir für jeden Zustand

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\chi_i\rangle \quad (2.39)$$

in \mathcal{H} einen korrespondierenden Zustand in $\tilde{\mathcal{H}}$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_i \alpha_i^* |\tilde{\chi}_i\rangle. \quad (2.40)$$

Für jeden Index k definiert die Gleichung

$$\Omega_{mk}|\psi\rangle \equiv \langle\tilde{\psi}|\phi_{mk}\rangle = \sum_i \alpha_i \langle\tilde{\chi}_i|\phi_{mk}\rangle \quad (2.41)$$

einen linearen Operator auf \mathcal{H} . Wir zeigen nun dass die Kollektion von Operatoren Ω_{mk} gerade die operation Φ_m wie in Gleichung (2.33) darstellen. Dazu betrachten wir zunächst den reinen Fall. Mit unseren Definitionen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_k \Omega_{mk}|\psi\rangle\langle\psi|\Omega_{mk}^\dagger &= \sum_k \langle\tilde{\psi}|\phi_{mk}\rangle\langle\phi_{mk}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\tilde{\psi}|\sigma_m|\tilde{\psi}\rangle \\ &= \langle\tilde{\psi}|(\Phi_m \otimes \mathbb{1})(|\phi\rangle\langle\phi|)|\tilde{\psi}\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle\tilde{\psi}|\Phi_m(|\chi_i\rangle\langle\chi_j|) \otimes (|\tilde{\chi}_i\rangle\langle\tilde{\chi}_j|)|\tilde{\psi}\rangle \\ &= \sum_{ij} \Phi_m(|\chi_i\rangle\langle\chi_j|)\alpha_j^* \alpha_i. \end{aligned} \quad (2.42)$$

und damit

$$\Phi_m(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_k \Omega_{mk}|\psi\rangle\langle\psi|\Omega_{mk}^\dagger. \quad (2.43)$$

Dies beweist die Darstellung (2.33) für Reinzustände. Der allgemeine Fall folgt mit der konvexen Linearität von Φ_m . Die Ungleichung in (2.34) ist schließlich eine Konsequenz der Bedingung (2.27). Das Darstellungs-Theorem zeigt uns, dass eine absolut positive quantum operation in Termen von Operatoren Ω_{mk} geschrieben werden kann. So erhebt sich die Frage wie es um die Freiheit in der Wahl der Operatoren Ω_{mk} bestellt ist. Wir betrachten dazu zwei Mengen $\{\Omega_{mk}\}$ und $\{\tilde{\Omega}_{mk}\}$ von Operatoren, welche die operations Φ_m und $\tilde{\Phi}_m$ in Übereinstimmung mit dem Darstellungs-Theorem repräsentieren:

$$\Phi_m(\rho) = \sum_k \Omega_{mk}\rho\Omega_{mk}^\dagger \quad (2.44)$$

$$\tilde{\Phi}_m(\rho) = \sum_k \tilde{\Omega}_{mk}\rho\tilde{\Omega}_{mk}^\dagger \quad (2.45)$$

Durch Hinzunahme von Null-Operatoren zu der kleineren Menge können wir immer sicherstellen dass beide Mengen dieselbe Anzahl an Elementen aufweisen. Die beiden operations sind dann und nur dann gleich, wenn es eine unitäre Matrix $u = (u_{kl})$ gibt so dass

$$\Omega_{mk} = \sum_l u_{kl} \tilde{\Omega}_{ml}. \quad (2.46)$$

Dies bedeutet dass die operations dann und nur dann gleich sind, wenn deren entsprechende Ω -Operatoren durch eine Linearkombination verknüpft sind, die Elemente einer unitären Matrix als Koeffizienten besitzt.

Um dies zu beweisen wollen wir davon ausgehen dass (2.46) gilt. Zusammen mit (2.44) und (2.45) folgt dann $\Phi_m = \tilde{\Phi}_m$. Gehen wir umgekehrt davon aus dass $\Phi_m = \tilde{\Phi}_m$ erfüllt ist, so ist

$$\sum_k \Omega_{mk} \rho \Omega_{mk}^\dagger = \sum_k \tilde{\Omega}_{mk} \rho \tilde{\Omega}_{mk}^\dagger, \quad (2.47)$$

für alle Dichten ρ . Unter Verwendung derselben Notation wie vorher definieren wir

$$|\phi_{mk}\rangle = (\Omega_{mk} \otimes \mathbb{1})|\phi\rangle, \quad |\tilde{\phi}_{mk}\rangle = (\tilde{\Omega}_{mk} \otimes \mathbb{1})|\phi\rangle \quad (2.48)$$

und finden damit

$$\sigma_m = \sum_k |\phi_{mk}\rangle \langle \phi_{mk}| = \sum_k |\tilde{\phi}_{mk}\rangle \langle \tilde{\phi}_{mk}|. \quad (2.49)$$

Damit wird der positive Operator σ_m durch die Zustände $\{|\phi_{mk}\rangle\}$ und $\{|\tilde{\phi}_{mk}\rangle\}$ generiert. Für die Zustände folgt damit

$$|\phi_{mk}\rangle = \sum_l u_{kl} |\tilde{\phi}_{ml}\rangle, \quad (2.50)$$

mit der unitären Matrix u . Für beliebige $|\psi\rangle$ ist

$$\Omega_{mk}|\psi\rangle = \langle \tilde{\psi} | \phi_{mk} \rangle = \sum_l u_{kl} \langle \tilde{\psi} | \tilde{\phi}_{ml} \rangle = \sum_l u_{kl} \tilde{\Omega}_{ml} |\psi\rangle, \quad (2.51)$$

also gerade Gleichung (2.46), und das war zu zeigen.

Eine wichtige Konsequenz dieser Aussage ist, dass jede operation Φ_m , wirkend auf den Zustandsraum eines Systems mit einem D -dimensionalen Hilbertraum, über maximal D^2 Operatoren Ω_{mk} dargestellt werden kann.

2.4 Quanten Messung und Entropie

An dieser Stelle soll kurz der Begriff der von Neumann Entropie eingeführt werden. Die von Neumann Entropie ist ein wichtiges Entropie-Funktional in der statistischen Quantenmechanik und Thermodynamik. Mit einem Zustand des quantenstatistischen Ensembles in Termen einer Dichtematrix ρ ist sie definiert durch

$$S(\rho) \equiv -tr\{\rho \ln \rho\}. \quad (2.52)$$

Im Allgemeinen induziert eine Quantenmessung eine Änderung der von Neumann Entropie. Wir definieren die Änderung der Entropie in einer nicht-selektiven Messung, beschrieben durch operations Φ_m , als

$$\Delta S = S(\rho') - S(\rho) = S\left(\sum_m \Phi_m(\rho)\right) - S(\rho). \quad (2.53)$$

Wir wollen zuerst eine ideale Quantenmessung betrachten, mit $\Phi_m(\rho) = \Pi_m \rho \Pi_m$, Π_m orthogonale Projektionen welche $\sum_m \Pi_m = \mathbb{1}$ erfüllen. Wir brauchen die Klein'sche Ungleichung und dafür eine Definition:

$$S(\rho||\sigma) \equiv tr\{\rho \ln \rho\} - tr\{\rho \ln \sigma\}. \quad (2.54)$$

Dies definiert die relative Entropie zweier Dichtematrizen ρ und σ . Die relative Entropie erfüllt die Klein'sche Ungleichung:

$$S(\rho||\sigma) \geq 0. \quad (2.55)$$

Mit dieser Ungleichung erhalten wir:

$$0 \leq S(\rho||\rho') = -S(\rho) - tr\{\rho \ln \rho'\}. \quad (2.56)$$

Zusammen mit der Vollständigkeitsrelation und der Tatsache dass $\rho' = \sum_m \Pi_m \rho \Pi_m$ mit allen Projektionen Π_m kommutiert finden wir für den zweiten Term auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens

$$\begin{aligned}
-tr\{\rho \ln \rho'\} &= -tr\left\{\sum_m \Pi_m \rho (\ln \rho') \Pi_m\right\} & (2.57) \\
&= -tr\left\{\sum_m \Pi_m \rho \Pi_m \ln \rho'\right\} \\
&= -tr\{\rho' \ln \rho'\} \\
&= S(\rho'),
\end{aligned}$$

und damit

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.58)$$

Dies bedeutet, dass eine nicht-selektive, ideale Messung niemals die von Neumann Entropie verringert. Ferner wollen wir festhalten, dass $\Delta S = 0$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn $\rho' = \rho$, dh. dann und nur dann wenn die Dichtematrix durch die Messung nicht verändert wird.

Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall für eine generalisierte Messung, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir betrachten ein Zweiniveausystem, der Hilbertraum wird aufgespannt durch die zwei Zustände $|e\rangle$ und $|g\rangle$. Wir definieren die zwei operations $\Phi_m(\rho) = \Omega_m \rho \Omega_m^\dagger$, $m = 1, 2$ und $\Omega_1 = |g\rangle\langle g|$, $\Omega_2 = |g\rangle\langle e|$. Damit haben wir effect mit $\Omega_1^\dagger \Omega_1 = |g\rangle\langle g|$ und $\Omega_2^\dagger \Omega_2 = |e\rangle\langle e|$ und ihre Summe addiert sich auf zur Identität $\mathbb{1}$. Für eine normierte Dichtematrix ρ zu Beginn finden wir nach der nicht-selektiven Messung folgendes vor:

$$\rho' = \Omega_1 \rho \Omega_1^\dagger + \Omega_2 \rho \Omega_2^\dagger = |g\rangle\langle g|. \quad (2.59)$$

Der Endzustand ist also ein Reinzustand und $S(\rho') = 0$. Dies bedeutet, dass sich die Entropie auf 0 reduziert wenn wir von einer Anfangsdichte mit positiver Entropie ausgehen. Das Beispiel zeigt also dass eine verallgemeinerte Messung die von Neumann Entropie verringern kann.

Eine weitere interessante Frage betrifft die Änderung der Entropie im Übergang von der selektiven zur nicht-selektiven Ebene einer Messung. Wir definieren eine Größe die als Mischentropie verstanden werden kann:

$$\delta S = S\left(\sum_m P(m) \rho'_m\right) - \sum_m P(m) S(\rho'_m). \quad (2.60)$$

Dies ist die Entropie der End-Dichtematrix $\rho' = \sum_m P(m) \rho'_m$ auf dem nicht-selektiven Level minus dem Durchschnitt der Entropien der Subensembles welche durch ρ'_m beschrieben werden. Diese Mischentropie erfüllt folgende Ungleichungen:

$$0 \leq \delta S \leq H(\{P(m)\}). \quad (2.61)$$

δS ist also immer nicht-negativ. Diese Aussage ist eine Konsequenz der Konkavität der von Neumann Entropie: Die von Neumann Entropie ist ein konkaves Funktional $\rho \rightarrow S(\rho)$ auf dem Raum der Dichtematrizen. Dies bedeutet, dass für jede Kollektion von Dichten ρ_i und Zahlen $\lambda_i \geq 0$ die der Gleichung $\sum_i \lambda_i = 1$ genügen gilt:

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i). \quad (2.62)$$

Die zweite Ungleichung besagt, dass δS niemals größer ist als die Shannon Entropie mit Zufallsvariable m und Verteilungsfunktion $m \rightarrow P(m)$. Der Beweis wird hier nicht geführt, vgl. dazu Nielsen und Chuang (2000). Wir können die Shannon Entropie als den Informationsverlust interpretieren, den wir im Übergang vom selektiven zum nicht-selektiven Level erfahren, da wir ja durch den Mischprozess die Messergebnisse vergessen. Anders gesagt ist die Shannon Entropie der Verteilung $P(m)$ ein Maß für die Information die man durch die Messung durch Realisation einer speziellen Zufallsvariable m gewinnt. Die Mischentropie ist niemals größer als die gewonnene Information. Es kann außerdem gezeigt werden, dass die Mischentropie dann und nur dann gleich der Shannon Entropie ist, wenn die Dichten ρ' orthogonale Bilder haben. Dies ist etwa für ideale Messungen der Fall, dort ist die Mischentropie gerade die Shannon Entropie.

2.5 Approximative Messungen

Die verallgemeinerte Struktur für die Beschreibung von Quantenmessungen wie sie hier eingeführt wurde ist in der Lage eine Beschreibung von approximativen Messungen, dh. Messapparaturen die das Spektrum einer Observablen \hat{R} mit nur endlicher Auflösung messen können, zu leisten (Braginsky und Khalili, 1992).

Wir betrachten eine physikalische Situation mit einer Observablen \hat{R} mit diskretem, nicht-entartetem Spektrum.

$$\hat{R} = \sum_m r_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \quad (2.63)$$

soll gemessen werden. Liegen die Eigenwerte r_m nicht zu dicht, so kann die Observable exakt gemessen werden, wenn nur die Auflösung der Apparatur hinreichend gut ist. Eine approximative Messung kommt nun zustande, wenn die Apparatur über keine hinreichend gute Auflösung verfügt, dh. wenn etwa zwei benachbarte Eigenwerte nicht mehr aufgelöst werden können. Für diese Fälle führen wir eine bedingte Wahrscheinlichkeit $W(m|m')$ ein. Sie repräsentiert die Wahrscheinlichkeit für das Messergebnis m , wenn man weiß dass das System im Zustand $\Psi_{m'}$ mit Eigenwert m' ist. Diese bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung fungiert als die endliche Auflösung der Apparatur. Sie beschreibt sowohl Störungen die durch die in der Umgebung gründen, als auch mögliche Unschärfen des Zustandes der Apparatur vor der Messung.

Unter der Annahme dass der Apparat immer ein definiertes Ergebnis liefert haben wir

$$\sum_m W(m|m') = 1. \quad (2.64)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Ergebnis r_m ist dann von der Form

$$P(m) = \sum_{m'} W(m|m') \langle\psi_{m'}|\rho|\psi_{m'}\rangle. \quad (2.65)$$

Diese ist auf 1 normiert:

$$\sum_m P(m) = 1. \quad (2.66)$$

Mit dem effect Operator

$$F_m \equiv |\psi_{m'}\rangle W(m|m') \langle\psi_{m'}| \quad (2.67)$$

können wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Messausgänge wie folgt schreiben:

$$P(m) = \text{tr}\{F_m \rho\}. \quad (2.68)$$

Dabei ist (2.67) ein positiver Operator, der die Normierungsbedingung (2.17) erfüllt.

Um nun eine geeignete operation zu finden berufen wir uns auf den Ansatz (2.24) und schließen aus der Konsistenzbedingung (2.20) auf die Relation (2.25). Die allgemeinste Form dieser Relation ist dann

$$\Omega_m = U_m F_m^{\frac{1}{2}}, \quad (2.69)$$

wobei U_m ein (unbestimmter) unitärer Operator ist, und

$$F_m^{\frac{1}{2}} \sum_{m'} |\psi_{m'}\rangle \sqrt{W(m|m')} \langle\psi_{m'}| \quad (2.70)$$

ist die Quadratwurzel von F_m . Die operation ist dann

$$\Phi_m(\rho) = U_m F_m^{\frac{1}{2}} \rho F_m^{\frac{1}{2}} U_m^\dagger, \quad (2.71)$$

was zeigt dass der Übergang von der Anfangsdichtematrix ρ zu jener welche das Subensemble bezüglich des Ausganges r_m beschreibt formal als ein Prozess in zwei Schritten angesehen werden kann:

$$\rho \rightarrow \rho'_m = P(m)^{-1} F_m^{\frac{1}{2}} \rho F_m^{\frac{1}{2}} \rightarrow \rho''_m = U_m \rho'_m U_m^\dagger. \quad (2.72)$$

Der zweite Schritt stellt eine unitäre Transformation der Dichtematrix dar. Die Entropie muss in diesem Schritt erhalten sein, es wird also keine Information über das Quantensystem gewonnen. Die exakte Form der unitären Transformation ist durch die Apparatur bestimmt. Dies zeigt uns, dass wir nicht in der Lage sind, die exakte Form der operation nur mit der Information aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messergebnisse zu bestimmen. Tatsächlich beschreibt der unitäre Operator U_m die Störung des Quantenobjektes durch die Messapparatur.

Der erste Schritt in (2.72) beschreibt den Informationsgewinn durch die Messung: In diesem Schritt splitten wir das Startensemble in Subensembles auf. Der effect F_m ist durch die Spektralfamilie von \hat{R} und der bedingten Wahrscheinlichkeit $W(m|m') = \delta_{mm'}$, die die endliche Auflösung der Apparatur beschreibt, eindeutig bestimmt. Da \hat{R} und F_m dieselbe Spektralfamilie besitzen, kommutieren sie: $[F_m, \hat{R}] = 0$. Wir werden sehen, dass dies eine hinreichende Bedingung an den ersten Schritt stellt wenn es sich um eine Quantum Non-Demolition Measurement (QND) handelt.

Im Falle unendlicher Auflösung haben wir $W(m', m) = \delta_{m,m'}$ und der effect reduziert sich auf die Form der idealen Messung von \hat{R} , dh. $F_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$.

Für die operation finden wir

$$\rho_m'' = U_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| U_m^\dagger, \quad (2.73)$$

wobei die Projektion üblicherweise mit einer unitären Transformation einher geht. Als ein weiteres Beispiel betrachten wir die approximative Messung des Ortsoperators \hat{Q} (Davies, 1976). Die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(q)$ für den Ausgang q ist

$$p(q) = \int dq' W(q - q') \langle q' | \rho | q' \rangle. \quad (2.74)$$

Die Verteilung $W(q - q')$ liefert die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, das der Apparat mit dem Wert q antwortet, gesetzt dem Falle dass das System im (generalisierten) Eigenzustand $|q'\rangle$ von \hat{Q} ist. Ein exaktes Messergebnis würde man erhalten, wenn $W(q)$ das Dirac-Delta erreichte. Der entsprechende effect ist

$$F_q = \int dq' |q'\rangle W(q - q') \langle q'|. \quad (2.75)$$

Es ist von Interesse auch den Mittelwert $E(Q, W)$ und die Varianz $Var(Q, W)$ für die Messergebnisse in dieser approximativen Messung zu betrachten. Wir finden mit der Verteilung $p(q)$:

$$E(Q, W) = E(Q) + \int dq q W(q) \quad (2.76)$$

$$Var(Q, W) = Var(Q) + \int dq q^2 W(q) - [\int dq q W(q)]^2, \quad (2.77)$$

wobei $E(Q)$ und $Var(Q)$ Mittelwert und Varianz bezüglich der idealen Messung von \hat{Q} sind. Die erste Gleichung zeigt, dass mit nicht-verschwindenden Mittelwert $W(q)$ ein systematischer Fehler in das Messergebnis eingeht. Die zweite Gleichung besagt, dass eine endliche Varianz der Verteilung $W(q)$ eine zusätzliche Dispersion liefert, die den durch $Var(Q)$ gegebenen, intrinsischen Fluktuationen überlagert ist.

2.6 Indirekte Quanten Messungen

Ein wichtiges Messkonzept, welches auch im Rahmen des entwickelten Formalismus behandelt werden kann, ist jenes der indirekten Quanten Messung (Braginsky und Khalili, 1992). Eine indirekte Messung kann als aus drei Elementen bestehend angesehen werden, wie es in Abbildung 2 gezeigt ist. Das erste Element ist das zu messende Quantensystem, also das System welchem die Information entnommen werden soll. Dieses System nennt man das *quantum object* und es lebt im Hilbertraum \mathcal{H}_O . Das zweite Objekt ist das sogenannte *quantum probe* mit Hilbertraum \mathcal{H}_P . Die quantum probe ist wiederum ein System welches mit dem quantum object wechselwirkt. Es wird angenommen dass das probe system vor der Wechselwirkung in geeigneter Weise präpariert

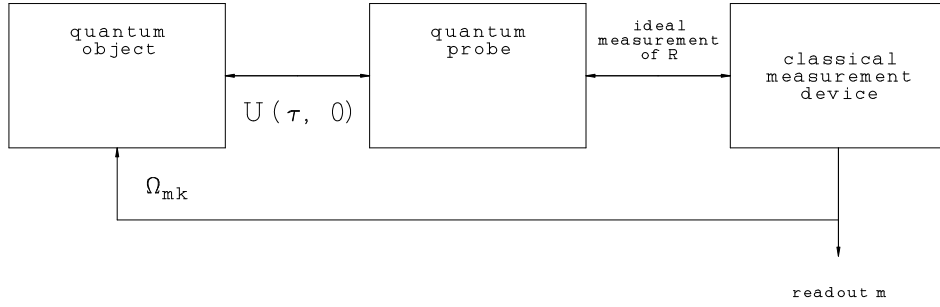


Abbildung 2: Schematische Darstellung des indirekten Messprozesses

wurde, beschrieben durch die Dichtematrix ρ_P . Durch die im Anschluss ausgeführte Messung werden Korrelationen zwischen object und probe aufgebaut. Das dritte Element ist schließlich der Apparat selbst, durch den die Messung der quantum probe ausgeführt wird wenn die Wechselwirkung zwischen probe und object zu Ende ist. Das Ziel ist es, Information über den Zustand des objects durch Messung der probe zu erhalten. Die Information wird dabei durch die durch die Wechselwirkung entstandene Korrelation zwischen object und probe deduziert. Für eine ideale Messung stellen wir drei Anforderungen:

1. Vor der Wechselwirkung zwischen object und probe zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde die probe in einen wohldefinierten Zustand ρ_P präpariert. Zur selben Zeit ist das quantum object im Zustand ρ_O .
2. Die Wechselwirkung zwischen quantum object und probe beginnt zur Zeit $t = 0$ und dauert bis zu einer Zeit $t = \tau > 0$ an, bevor die Messung durch den Apparat einsetzt.
3. Das dritte Element der Messung repräsentiert einen klassischen Apparat und die Messung der quantum probe kann als ideale Messung im Sinne des von Neumann-Lüders Projektions-Postulates verstanden werden.

Wir wollen nun explizite Ausdrücke für operation und effect finden, die zu einer solchen idealen Messung gehören.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das gesamte Quantensystem, bestehend aus probe und object, durch eine Dichtematrix $\rho_O \otimes \rho_P$ beschrieben, welche zum Gesamthilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_P$ gehört. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems ist gegeben durch

$$H(t) = H_O + H_P + H_I(t), \quad (2.78)$$

mit H_O und H_P zur Beschreibung der freien Evolvierung von object und probe und $H_I(t)$ für deren Wechselwirkung. Es wird angenommen, dass die zeitabhängige Wechselwirkung ausserhalb des Intervalles $[0, \tau]$ verschwindet. Den zugehörigen, unitären Operator, der die Zeitentwicklung über dieses Intervall im Sinne der Schrödinger-Gleichung beschreibt, notieren wir mit U :

$$U \equiv U(\tau, 0) = T \exp[-i \int_0^\tau dt H(t)], \quad (2.79)$$

wobei T für die Zeitordnung steht und $\hbar = 1$ gesetzt wurde. Die Dichtematrix des Gesamtsystemes $\rho(0) = \rho_O \otimes \rho_P$ evolviert dann nach der Zeit τ in

$$\rho(\tau) = U(\rho_O \otimes \rho_P)U^\dagger. \quad (2.80)$$

Wir wollen nun annehmen, dass der klassische Apparat die probe Observable zum Zeitpunkt τ misst:

$$\hat{R} = \sum_m r_m |\phi_m\rangle\langle\phi_m| \quad (2.81)$$

mit einem nicht-entarteten, diskreten Spektrum. \hat{R} ist ein selbstadjungierter Operator, der im Hilbertraum der probe, \mathcal{H}_P , wirkt. Die Wahrscheinlichkeit $P(m)$ für den Ausgang r_m dieser Messung ist gegeben durch

$$P(m) = \text{tr}\{|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\rho(\tau)\} = \text{tr}\{U^\dagger|\phi_m\rangle\langle\phi_m|U(\rho_O \otimes \rho_P)\}, \quad (2.82)$$

wobei die Spur bezüglich des Gesamthilbertraumes \mathcal{H} gebildet wird. Die partiellen Spuren über \mathcal{H}_O und \mathcal{H}_P wollen wir als tr_O und tr_P notieren. Der Ausdruck für $P(m)$ kann dann umgeschrieben werden:

$$P(m) = \text{tr}_O\{F_m\rho_O\}, \quad (2.83)$$

mit dem effect

$$F_m\rho_O = \text{tr}_P\{U^\dagger|\phi_m\rangle\langle\phi_m|U(\rho_O \otimes \rho_P)\}. \quad (2.84)$$

F_m ist ein positiver Operator der im Hilbertraum \mathcal{H}_O des objects wirkt und der der Normalisierungsbedingung genügt, dh. wir haben

$$\sum_m F_m\rho_O = \sum_m \text{tr}_P\{U^\dagger|\phi_m\rangle\langle\phi_m|U(\rho_O \otimes \rho_O)\} = \text{tr}_P\{\rho_O \otimes \rho_P\} = \rho_O, \quad (2.85)$$

was zeigt dass (2.17) erfüllt ist.

Die operation für die indirekte Messung erhalten wir durch Anwendung des von Neumann-Lüders Projektions-Postulates auf die Messung der probe, was uns den folgenden Zustand des quantum objects liefert:

$$\rho'_m = P(m)^{-1}\langle\phi_m|U(\rho_O \otimes \rho_P)U^\dagger|\phi_m\rangle. \quad (2.86)$$

Mit der Spektralzerlegung der Dichtematrix der probe

$$\rho_P = \sum_k p_k |\Phi_k\rangle\langle\Phi_k|, \quad (2.87)$$

können wir die operation auf das quantum object als

$$\Phi_m(\rho_O) = \sum_k \Omega_{mk}\rho_O\Omega_{mk}^\dagger, \quad (2.88)$$

schreiben, wobei

$$\Omega_{mk} = \sqrt{p_k}\langle\phi_m|U|\Phi_k\rangle \quad (2.89)$$

ist. Unter Verwendung dieser Operatoren ist dann der effect gegeben durch

$$F_m = \sum_k \Omega_{mk}^\dagger\Omega_{mk}. \quad (2.90)$$

Wir finden also, dass operation und effect genau die Form annehmen, die durch das Darstellungstheorem gegeben ist, vgl. Gleichungen (2.33) und (2.34). Ist die probe am Anfang im Reinzustand $\rho_P = |\Phi\rangle\langle\Phi|$, dann ist

$$\Omega_m = \langle\phi_m|U|\Phi\rangle \quad (2.91)$$

proportional zur Amplitude für einen Übergang der probe vom Zustand Φ in den Eigenzustand ϕ_m der gemessenen Observable \hat{R} . Ω_m ist ein Operator im Hilbertraum des quantum objects der die Änderung des Zustandes des objects, der durch den Ausgang r_m der Messung auf die probe induziert wird, beschreibt. Die zusätzliche Summe über den Index k im allgemeinen Ausdruck (2.88) trägt dem Umstand Rechnung, dass es sich bei dem Anfangszustand der probe um eine statistische Mischung handeln könnte.

Diese Ergebnisse können auf Fälle mit einer Observablen \hat{R} mit kontinuierlichem Spektrum verallgemeinert werden. Wir wollen dazu ein Beispiel betrachten. Wir nehmen \hat{R} als den Impulsoperator \hat{P} in eine bestimmte Richtung, dh. der klassische Apparat misst eine bestimmte Komponente des

Impulses von probe-Teilchen. Wir wollen eine nicht-entartete, diskrete Observable \hat{A} des quantum objects durch eine indirekte Messung bestimmen:

$$\hat{A} = \sum_{\nu} a_{\nu} |\chi_{\nu}\rangle \langle \chi_{\nu}|. \quad (2.92)$$

Nun paaren wir den Ortsoperator \hat{Q} kanonisch konjugiert zu \hat{P} ,

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i, \quad (2.93)$$

mit der Observablen \hat{A} , dh. der Wechselwirkungshamiltonoperator ist

$$H_I(t) = g(t) \hat{A} \hat{Q}, \quad (2.94)$$

wobei angenommen wird dass die zeitabhängige Kopplung ausserhalb des Zeitintervalles $[0, \tau]$ verschwindet. Zur weiteren Vereinfachung wollen wir annehmen, dass die Wechselwirkungsdauer τ sehr kurz ist und wir daher die freie Evolution generiert durch $H_O + H_P$ in dieser Zeit vernachlässigen können. Der unitäre Zeitentwicklungsoperator ist dann

$$U = \exp[-iG\hat{A}\hat{Q}] \quad (2.95)$$

mit

$$G \equiv \int_0^{\tau} dt g(t) \quad (2.96)$$

als integrierte Kopplungsstärke. Die quantum probe sei im Anfangszustand $\rho_P = |\phi\rangle\langle\phi|$, so dass wir für den dem Messergebnis p zugehörigen Operator Ω_P (Vgl. Gleichung (2.91)) finden:

$$\begin{aligned} \Omega_P &= \langle p|U|\phi\rangle \\ &= \langle p|\exp[-iG\hat{A}\hat{Q}]\Phi\rangle \\ &= \sum_{\nu} |\chi_{\nu}\rangle \langle p|\exp[-iGa_{\nu}\hat{Q}]\Phi\rangle \langle \chi_{\nu}|. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Das Matrixelement im letzten Ausdruck ist gleich $\Phi(p + Ga_{\nu})$, mit $\Phi(p) \equiv \langle p|\Phi\rangle$ die Anfangswellenfunktion der probe in Impulsraumdarstellung. Wir haben

$$\Omega_p = \sum_{\nu} |\chi_{\nu}\rangle \Phi(p + Ga_{\nu}) \langle \chi_{\nu}| = \phi(p + G\hat{A}). \quad (2.98)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Impulsmessung $f(p)$ (wir verwenden f für Wahrscheinlichkeitsdichten um Verwechslungen mit dem Impuls auszuschließen) folgt der Ausdruck

$$f(p) = \text{tr}\{\Omega_p^{\dagger} \Omega_p \rho_O\} = \sum_{\nu} |\Phi(p + Ga_{\nu})|^2 \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu} \rangle. \quad (2.99)$$

Die letzten beiden Gleichungen beschreiben eine approximative Messung der Observablen \hat{A} . Um dies zu erkennen müssen wir folgende Frage beantworten: Welche Information der Observablen \hat{A} des quantum objects kann durch Messung von \hat{P} abgeleitet werden? Nehmen wir für den Moment an $|\Phi(p)|^2$ wäre scharf um ihren Mittelwert gepeakt:

$$\langle p \rangle \equiv \langle \Phi | \hat{P} | \Phi \rangle \equiv \int dp p |\Phi(p)|^2. \quad (2.100)$$

Mit Gleichung (2.98) sehen wir, dass die Messung von p den Zustand des quantum objects auf eine Gruppe von Eigenzuständen χ_{ν} von \hat{A} projiziert, deren Eigenwerte a_{ν} die Relation $p + Ga_{\nu} \approx \langle p \rangle$ erfüllen. Die genaue Anzahl von Zuständen in der Gruppe hängt von der Breite der Wellenfunktion

der probe in der Impulsdarstellung ab. So definieren wir den a -Wert, der aus dem Messergebnis p aus der Beziehung $p + Ga = \langle p \rangle$ abgeleitet ist, dh.

$$a = \frac{1}{G}(\langle p \rangle - p). \quad (2.101)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte von a haben wir dann

$$f(a) = \sum_{\nu} W(a - a_{\nu}) \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu} \rangle, \quad (2.102)$$

wobei

$$W(a - a_{\nu}) = |G| \cdot |\Phi(\langle p \rangle - G[a - a_{\nu}])|^2 \quad (2.103)$$

ist. Dies bedeutet, dass die direkte Messung des Impulses \hat{P} der probe-Teilchen eine approximative Messung der Observable \hat{A} des quantum objects liefert. Der Ausdruck (2.103) repräsentiert die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte der approximativen Messung von \hat{A} : Er liefert die Dichte dafür den Wert a vorzufinden, wenn das object in einem Eigenzustand mit Eigenwert a_{ν} ist. $W(a - a_{\nu})$ ist auf 1 normiert,

$$\int da W(a - a_{\nu}) = 1, \quad (2.104)$$

und genügt

$$\int da a W(a - a_{\nu}) = a_{\nu}, \quad (2.105)$$

$$\int da a^2 W(a - a_{\nu}) = a_{\nu}^2 + \frac{1}{G^2} Var(P), \quad (2.106)$$

mit $Var(P)$ für die Varianz von \hat{P} im Anfangszustand Φ der probe. Mit der Gleichung (2.105) folgt, dass der Ausdruck (2.101) für den Wert von a , abgeleitet aus dem Messergebnis p , einen verschwindenden bias hat, dh. der Erwartungswert deckt sich mit dem exakten Mittelwert von \hat{A} ,

$$E(a) \equiv \int da a f(a) = tr\{\hat{A}\rho_O\} = E(A). \quad (2.107)$$

Gleichung (2.106) führt auf die Relation

$$\begin{aligned} Var(a) &= \int da a^2 f(a) - \left[\int da a f(a) \right]^2 \\ &= Var(A) + \frac{1}{G^2} Var(P). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Diese Gleichung sagt uns, dass die Varianz des abgeleiteten Wertes a gleich ist der Summe der exakten Varianz $Var(A)$ von \hat{A} plus der Varianz des probe Impulses des Anfangszustandes geteilt durch G^2 . Die Messung ist umso genauer je geringer die Impulsunschärfe der probe und je stärker die Kopplung zwischen quantum object und probe ist. Mit gewonnenem Wert a folgt für die operation der Operator

$$\Omega_a = \sum_{\nu} |\chi_{\nu}\rangle \sqrt{|G|} \Phi(\langle p \rangle - G[a - a_{\nu}]) \langle \chi_{\nu} | = \sqrt{|G|} \Phi(\langle p \rangle - G(a - \hat{A})). \quad (2.109)$$

Die Dichtematrix des resultierenden Subensembles ist dann von der Form

$$\begin{aligned} \rho'_a &= \frac{\sum_{\nu\nu'} |\chi_{\nu}\rangle \Phi(\langle p \rangle - G[a - a_{\nu}]) \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu'} \rangle \Phi^*(\langle p \rangle - G[a - a_{\nu'}]) \langle \chi_{\nu'} |}{\sum_{\nu} |\Phi(\langle p \rangle - G[a - a_{\nu}])|^2 \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu} \rangle} \\ &= \frac{\Omega_a \rho_O \Omega_a}{tr\{\Omega_a^\dagger \Omega_a \rho_O\}}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Im idealen Falle eines unendlich scharfen Anfangsimpulses p_0 der probe haben wir $|\Phi(p)|^2 \rightarrow \delta(p - p_0)$, und damit

$$f(a) = \sum_{\nu} \delta(a - a_{\nu}) \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu} \rangle, \quad (2.111)$$

was zeigt dass a nur die durch Eigenwerte des Operators \hat{A} gegebenen, diskrete Werte annehmen kann. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$$P(a_{\nu}) = \langle \chi_{\nu} | \rho_O | \chi_{\nu} \rangle \quad (2.112)$$

sowie die neue Dichtematrix

$$\rho'_{a_{\nu}} = |\chi_{\nu}\rangle \langle \chi_{\nu}| \quad (2.113)$$

sind durch die korrekten Formeln für die ideale Messung von \hat{A} gegeben.

2.7 Quantum Non-Demolition Measurements (QND)

Nehmen wir an eine ideale, nicht-selektive Messung einer Observablen \hat{A} wird auf einem System ausgeführt dessen Zustand durch ρ gegeben ist. Kommutiert nun \hat{A} mit ρ so wird der Zustand des Systemes durch die Messung nicht geändert. Wenn

$$\hat{A} = \sum_{\nu} a_{\nu} \Pi_{\nu} \quad (2.114)$$

die Spektralzerlegung von \hat{A} mit a_{ν} als Eigenwerte und die Π_{ν} entsprechende Projektionen, dann finden wir für die nicht-selektive Dichtematrix ρ' nach der Messung

$$\rho' = \sum_{\nu} \Pi_{\nu} \rho \Pi_{\nu} = \sum_{\nu} \Pi_{\nu} \rho = \rho, \quad (2.115)$$

wobei die Vollständigkeitsrelation und die Kommutativität von ρ mit den Projektionen Π_{ν} verwendet wurden.

Betrachten wir nun eine verallgemeinerte Messung mit operations Φ_m , definiert in Termen von Operatoren Ω_m , wie etwa in Gleichung (2.24). So eine Anordnung nennt man ein Quantum Non-Demolition Measurement (QND measurement) (Braginsky und Khalili, 1992) für eine Observable \hat{A} , wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine ideale Messung von \hat{A} durch den Messvorgang unverändert bleibt, dh. die Verteilung der Eigenwerte von \hat{A} ist dieselbe für die Dichtematrix am Beginn und Ende der Messung. Hier wird angenommen dass die verallgemeinerte Messung eine nicht-selektive Messung ist. QND Messapparaturen spielen eine wichtige Rolle für das Design von hochpräzisen Quantenmessungen (Bocko und Onofrio, 1996). Unter Verwendung der Gleichung (2.24) und der vorherigen Definition können wir schreiben:

$$tr\{\hat{A}^k \rho\} = tr\{\hat{A}^k \rho'\} = \sum_m tr\{\hat{A}^k \Omega_m \rho \Omega_m^{\dagger}\}. \quad (2.116)$$

Alle Momente von \hat{A} stimmen also in Anfangs- und Endzustand überein, somit auch Verteilung der Eigenwerte (unter der vereinfachenden Annahme dass die Momente existieren). Für das obige Beispiel einer idealen Messung von \hat{A} sind die Ω_m durch die Projektionen Π_{ν} und die Bedingung (2.116) ist erfüllt sofern ρ mit Ω_m kommutiert. Dies ist eine Bedingung an den Zustand des Quantensystems auf dem die Messung ausgeführt wird.

Alternativ können wir die Bedingung (2.116) auch als eine Anforderung an die Operatoren Ω_m verstehen, die für alle Zustände ρ des Quantensystems halten muss. Mit (2.26) nimmt (2.116) folgende Form an:

$$\sum_m tr\{\Omega_m^{\dagger} [\hat{A}^k, \Omega_m] \rho\} = 0. \quad (2.117)$$

Da diese Bedingung für alle ρ halten muss, finden wir als hinreichende Bedingung für eine QND-Messung:

$$[\hat{A}, \Omega_m] = 0. \quad (2.118)$$

Eine Messung ist also genau dann eine QND-Messung der Observablen \hat{A} , wenn die Operatoren die die Änderung des Systems, welche durch die Messung induziert wird, beschreiben mit \hat{A} kommutieren. Die Bedingung (2.118) ist für eine ideale Messung der Observablen \hat{A} immer erfüllt, dh. eine ideale Messung von \hat{A} ist immer eine QND-Messung im Sinne unserer Definition. Aus Gleichung (2.109) folgt ferner, dass für das Beispiel zur indirekten Messung, welches im vorerghenden Abschnitt diskutiert wurde, ebenfalls die QND-Bedingung (2.118) erfüllt. Dies ist deswegen der Fall, da Ω_a diagonal in \hat{A} -Darstellung ist, was wiederum von der Tatsache herrührt dass der Wechselwirkungshamiltonian $H_I(t)$ mit der Messgröße kommutiert. \hat{A} ist eine konstante der Bewegung durch den Messprozess.

Wir wollen nun eine indirekte Messung mit probe im Reinzustand Φ betrachten. Wir setzen (2.91) in (2.118) ein:

$$\langle \Phi_m | [\hat{A}, Z(\tau, 0)] | \Phi \rangle = 0. \quad (2.119)$$

Dies muss für alle m erfüllt sein. Nachdem die Φ_m eine Basis im Hilbertraum \mathcal{H}_P der probe sind, folgt

$$[\hat{A}, U(\tau, 0)] | \Phi \rangle = 0. \quad (2.120)$$

Der Gleichung kann genügt werden indem die probe in einen entsprechenden Zustand Φ präpariert wird. Nachdem dies aber in der Praxis ein schwieriges Unterfangen ist, fordert man dass der Kommutator selbst verschwindet, was auf folgende hinreichende QND-Bedingung führt:

$$[\hat{A}, U(\tau, 0)] = 0. \quad (2.121)$$

Im Heisenbergbild haben wir

$$\hat{A}_H(t) = U^\dagger(t, 0) \hat{A} U(t, 0) \quad (2.122)$$

und nach der Zeit $t = \tau$ muss der Operator wieder zum Ausgangswert zurückgekehrt sein, dh. $\hat{A}_H(\tau) = \hat{A}_H(0)$. Am Einfachsten wird dies erreicht indem man fordert, dass \hat{A} mit dem Gesamthamiltonoperator $H(t) = H_O + H_P + H_I(t)$ kommutiert:

$$[\hat{A}, H_I(t)] = 0. \quad (2.123)$$

Wenn \hat{A} eine Konstante unter der freien Evolution des quantum objects ist, so finden wir als allgemeine, hinreichende Bedingung für eine QND-Messung:

$$[\hat{A}, H_I(t)] = 0. \quad (2.124)$$

Diese Bedingung nennt man die *back-action evasion condition*, da sie sicherstellt, dass die Wechselwirkung des objects mit der probe die Messgröße nicht stört. Man kann ferner zeigen, dass eine hinreichende QND-Bedingung für eine approximative Messung durch $[\hat{R}, U_m] = 0$ gegeben ist, dh. die approximativ gemessene Observable muss mit den im zweiten Schritt von (2.72) auftretenden, unitären Operatoren U_m kommutieren. Diese unitäre Transformation stört im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messgröße.

3 Der Quanten-Zeno-Effekt

Wir betrachten die Messung einer Observablen A dessen Spektrum diskret und nicht entartet ist,

$$A = \sum_n a_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (3.1)$$

Eine Folge von idealen und instantan durchgeführten Messungen der Observable A wird so durchgeführt, dass zwischen zwei Messungen ein festes Zeitintervall θ liegt. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen entwickelt sich der Zustandsvektor des Systems entsprechend der Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (3.2)$$

mit irgendeinem Hamiltonoperator H . Im Limes $\theta \rightarrow 0$ spricht man von einer *kontinuierlichen Messung* der Observablen A .

Nehmen wir an, dass sich das System zu Beginn in einem Eigenzustand $|\psi_n\rangle$ von A mit dazugehörigem Eigenwert a_n befindet,

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_n\rangle. \quad (3.3)$$

Für genügend kleine t ergibt sich entsprechend der Schrödingergleichung,

$$|\psi(t)\rangle = \left[\mathbb{1} - iHt - \frac{1}{2}H^2t^2 + \dots \right] |\psi_n\rangle. \quad (3.4)$$

Die erste ideale Messung von A wird zur Zeit $t = \theta$ durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit bei dieser Messung den Eigenwert a_n zu erhalten ist gegeben durch,

$$w_{nn}(\theta) = |\langle \psi_n | \psi(\theta) \rangle|^2 = 1 - (\Delta E)_n^2 \theta^2 + \dots \quad (3.5)$$

mit

$$(\Delta E)_n^2 = \langle \psi_n | H^2 | \psi_n \rangle - \langle \psi_n | H | \psi_n \rangle^2 \quad (3.6)$$

als Energieunschärfe für den Zustand $|\psi_n\rangle$. Die Größe $w_{nn}(\theta)$ ist dabei die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit θ noch immer im Anfangszustand $|\psi_n\rangle$ befindet. Nach der Zeit $\tau = k\theta$, dass heißt nach k Messungen, ist die Wahrscheinlichkeit daher

$$w_{nn}(\tau) \approx \left[1 - (\Delta E)_n^2 \theta^2 \right]^k. \quad (3.7)$$

Für große k und fixes τ , dass heißt im Limes $\theta = \tau/k \rightarrow 0$, führt dies zu

$$w_{nn}(\tau) \approx \left[1 - (\Delta E)_n^2 \frac{\tau \theta}{k} \right]^k \approx \exp \left[-(\Delta E)_n^2 \tau \theta \right] \rightarrow 1. \quad (3.8)$$

Diese Gleichung sagt uns, dass das System mit Wahrscheinlichkeit 1 im Anfangszustand $|\psi_n\rangle$ bleibt, falls eine kontinuierliche, ideale Messung der Observable A am System durchgeführt wird. Formal liegt der Grund hierfür in der Tatsache, dass im Limes kleiner θ die Wahrscheinlichkeit den Zustand $|\psi_n\rangle$ zu verlassen, proportional zum Quadrat von θ ist. Das heißt es gilt $1 - w_{nn}(\theta) \propto \theta^2$, während die Anzahl k der Messungen mit θ^{-1} ansteigt. Die Rückprojektion in den Zustand $|\psi_n\rangle$ durch die Abfolge der Messungen erfolgt daher schneller, als mögliche Übergänge in andere Zustände. In Analogie zu Zeno's Paradoxon ist dieses Phänomen bekannt als *Quanten-Zeno-Effekt*.

4 Die Dichtematrixgleichung

Der oben beschriebene Quanten-Zeno-Effekt, resultiert freilich aus einer Idealisierung des Problems, da wir eine ideale, kontinuierliche Messung angenommen haben. Um zu sehen, was bei einer nicht-idealen Messung passiert, betrachten wir das folgende Modell einer indirekten, kontinuierlichen Beobachtung des Systems.

Genau wie im vorigen Abschnitt, unterteilen wir die Zeitachse wieder in Intervalle der Länge θ . Während jedes Zeitintervalls entwickelt sich das Objekt-System entsprechend der Schrödingergleichung (3.2). Der Unterschied ist nun aber, dass statt idealen Messungen am Beginn jedes Intervalls, indirekte Messungen, der Observable A durchgeführt werden (siehe dazu den Abschnitt über indirekte Quantenmessung).

Am Beginn jedes Intervalls wechselwirkt ein einzelnes Probeteilchen mit Koordinate Q über einen Wechselwirkungshamilton der Form $H_I(t) = g(t)AQ$ mit unserem Quanten-Objekt. Diese Probeteilchen sind unabhängig voneinander und in identischen Anfangszuständen $|\phi_\theta\rangle$. Nach der Objekt-Probeteilchen-Wechselwirkung wird der zu Q kanonisch konjugierte Impuls P eines jeden Probeteilchens gemessen. Dieser Vorgang wird durch die Operatoren (vgl. Gleichung (2.97))

$$\langle p|\exp[-iGAQ]|\phi_\theta\rangle \quad (4.1)$$

beschrieben, wobei $|p\rangle$ ein Impulseigenzustand und $G = \int dt g(t) = \theta$ die integrierte Kopplungsstärke ist. Diese soll laut Annahme mit θ skalieren.

Wenn man die kohärente Entwicklung mittels H miteinbezieht ergibt sich eine Operation die beschrieben wird durch die Operatoren

$$\Omega_p = \exp[-iH\theta]\langle p|\exp[-iAQ\theta]|\phi_\theta\rangle. \quad (4.2)$$

Die Entwicklung der Dichtematrix unseres Objekt über ein Zeitintervall θ kann daher geschrieben werden als

$$\rho(t + \theta) = \int dp \Omega_p \rho(t) \Omega_p^\dagger. \quad (4.3)$$

Durch Substitution von (4.2) erhält man

$$\begin{aligned} \rho(t + \theta) &= \rho(t) - i[H, \rho(t)]\theta - i[A, \rho(t)]\langle Q \rangle_\theta \theta \\ &+ \left[A\rho(t)A - \frac{1}{2}A^2\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)A^2 \right] \langle Q^2 \rangle_\theta \theta^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei der kohärente Anteil in erster und der inkohärente Anteil in zweiter Ordnung in θ entwickelt wurde. Die Größen $\langle Q \rangle_\theta$ und $\langle Q^2 \rangle_\theta$ sind definiert als

$$\langle Q \rangle_\theta = \langle \phi_\theta | Q | \phi_\theta \rangle, \quad \langle Q^2 \rangle_\theta = \langle \phi_\theta | Q^2 | \phi_\theta \rangle \quad (4.5)$$

Wir nehmen nun an, dass $\langle Q \rangle_\theta = 0$ ist. Das bedeutet, dass der Drift-Anteil $-i[A, \rho(t)]\langle Q \rangle_\theta$ verschwindet und daher der Messapparat nicht zu einer systematischen Rückwirkung auf die Dynamik des Quantenobjekts führt. Weiters wird angenommen, dass der Limes

$$\sigma_Q^2 \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \langle Q^2 \rangle_\theta \quad (4.6)$$

existiert und endlich ist. Daraus folgt, dass die stochastische Rückwirkung, induziert durch die Messung, im Kontinuumsmlimes $\theta \rightarrow 0$ endlich bleibt.

Im Kontinuumsmlimes erhalten wir daher die folgende Bewegungsgleichung für einen Zustand des Systems,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= -i[H, \rho(t)] + \sigma_Q^2 \left[A\rho(t)A - \frac{1}{2}A^2\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)A^2 \right] \\ &= -i[H, \rho(t)] - \frac{1}{2}\sigma_Q^2 [A, [A, \rho(t)]]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält einen einzelnen hermitschen Lindbladoperator A gegeben durch die indirekt zu messende Observable.

Der Dissipator der Master-Gleichung beschreibt die Rückwirkung auf das Objekt-System, induziert durch den Messapparat. Die Stärke der Rückwirkung ist verknüpft mit der Genauigkeit der Messung von A . Unter der Annahme das $\langle P \rangle_\theta = 0$, erhalten wir aufgrund der Unschärferelation

$$\frac{\langle P^2 \rangle_\theta}{\theta} \cdot \theta \langle Q^2 \rangle_\theta \geq \frac{1}{4}. \quad (4.8)$$

Nimmt man den Limes $\theta \rightarrow 0$ erhält man

$$\sigma_A^2 \cdot \sigma_Q^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (4.9)$$

mit der Definition

$$\sigma_A^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\langle P^2 \rangle_\theta}{\theta}. \quad (4.10)$$

Die Größe σ_A ist ein Maß für die Unschärfe der A -Messung und Gleichung (4.9) zeigt, dass die Rückwirkung, induziert durch die Messung, umso stärker ist, je größer die Genauigkeit der A -Messung ist. Gleichung (4.9) bietet daher eine Art Unschärferelation für die Genauigkeit der Beobachtung und die daraus resultierende fluktuierende Rückwirkung auf das gemessene System. Wenn man A als dimensionslos annimmt hat die Größe σ_Q^2 die Dimension einer inversen Zeit,

$$\tau_0 \equiv [\sigma_Q^2]^{-1}, \quad (4.11)$$

und wird als *Zeno-Zeit* bezeichnet. In der Tat ist die Zeit τ_0 proportional zur Genauigkeit der A -Messung. Der Fall einer verschwindenden Zeno-Zeit, $\tau_0 \rightarrow 0$, führt zurück zum oben beschriebenen Quanten-Zeno-Effekt, das heißt wir betrachten wieder eine beliebig genaue, ideale Messung. Das Zusammenspiel zwischen der charakteristischen Zeitskala der kohärenten Bewegung des Objektsystems und der Zeno-Zeit τ_0 kann gut anhand eines 2-Niveausystems dargestellt werden. Der Hamiltonoperator des freien Objekts ist $H = -\frac{\Omega}{2}\sigma_1$ und beschreibt kohärente Rabi-Oszillationen mit Frequenz Ω . Die Messgröße ist in diesem Fall $A = \sigma_3$, das bedeutet der Messapparat ist so ausgelegt, dass er beobachten kann, ob das System sich im oberen Zustand $|e\rangle$ oder im unteren Zustand $|g\rangle$ befindet. Die dazugehörige Dichtematrixgleichung nimmt daher die Form

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{i\Omega}{2} [\sigma_1, \rho(t)] - \frac{1}{2\tau_0} [\sigma_3, [\sigma_3, \rho(t)]], \quad (4.12)$$

an. Dies führt zum folgenden System von Differentialgleichungen für die Komponenten des Bloch-Vektors,

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_1(t)\rangle = -\frac{2}{\tau_0}\langle\sigma_1(t)\rangle, \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_2(t)\rangle = -\frac{2}{\tau_0}\langle\sigma_2(t)\rangle + \Omega\langle\sigma_3(t)\rangle, \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_3(t)\rangle = -\Omega\langle\sigma_2(t)\rangle. \quad (4.15)$$

Betrachten wir den Fall, dass sich das System zu Beginn im oberen Niveau befindet. Das bedeutet das $\rho(0) = |e\rangle\langle e|$ ist, sodass sich für $\langle\sigma_1(0)\rangle = \langle\sigma_2(0)\rangle = 0$ und $\langle\sigma_3(0)\rangle = 1$ ergibt. Die entsprechende Lösung der obigen Differentialgleichungen führt zu

$$\langle\sigma_3(t)\rangle = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} (\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}), \quad (4.16)$$

wobei die charakteristischen Frequenzen gegeben sind durch

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{\tau_0} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - \Omega^2}. \quad (4.17)$$

Mithilfe dieser Relationen ist die Zeitentwicklung des oberen Zustandes gegeben durch

$$p_e(t) = \frac{1}{2}(1 + \langle\sigma_3(t)\rangle). \quad (4.18)$$

Da die Realteile von $\mu_{1,2}$ immer positiv sind, erreicht die Besetzungswahrscheinlichkeit $p_e(t)$ des oberen Zustandes im Langzeitlimes den Wert $1/2$. Das bedeutet, dass die Rückwirkung des Messapparates das Quantenobjekt in einen stationären Zustand mit gleicher Besetzungswahrscheinlichkeit für den oberen und unteren Zustand relaxiert. Im ungedämpften Fall $\Omega\tau_0 > 1$ sind die charakteristischen Frequenzen komplex. Wir schreiben sie als $\mu_{1,2} = 1/\tau_0 \pm i\nu$ mit

$$\nu = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2 \tau_0^2}}. \quad (4.19)$$

Dann erhalten wir

$$\langle \sigma_3(t) \rangle = \left(\cos \nu t + \frac{1}{\nu \tau_0} \sin \nu t \right) e^{-t/\tau_0}. \quad (4.20)$$

Dies zeigt, dass $p_e(t)$ einer exponentiell gedämpften Oszillation mit Frequenz ν entspricht. Für $\Omega\tau_0 \gg 1$, das heißt für eine Zeno-Zeit die viel größer als die Inverse der Rabi-Frequenz ist, oszilliert das Objekt viele Male mit einer näherungsweise ungestörten Frequenz $\nu \approx \Omega$. Falls die Zeno-Zeit abnimmt, wird auch die Frequenz ν kleiner und die kohärenten Oszillationen sterben schließlich bei $\Omega\tau_0 = 1$ aus. Für den übergedämpften Fall $\Omega\tau_0 < 1$ ergibt sich eine monotone

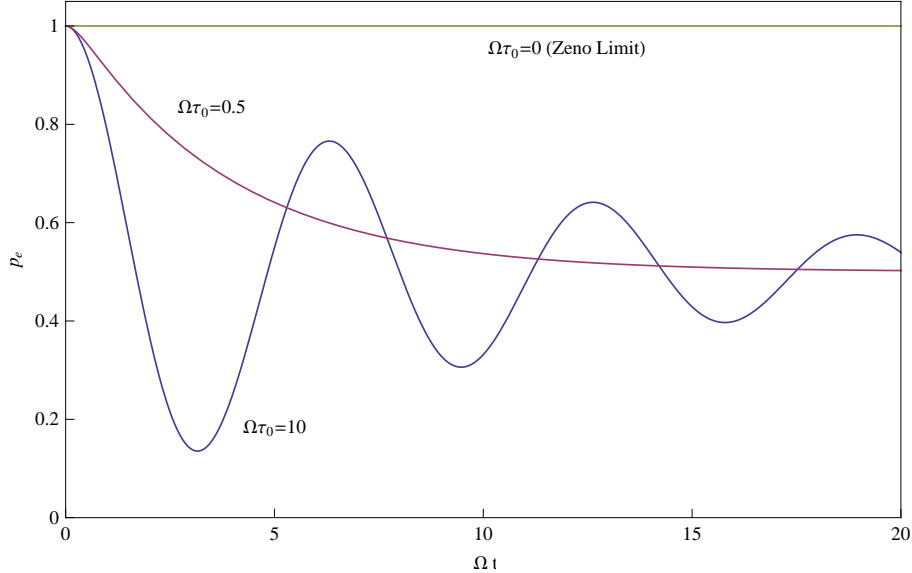


Abbildung 3: Die Besetzungswahrscheinlichkeit $p_e(t)$ (Glg. (4.18)) als Funktion der Zeit für drei unterschiedliche Werte der Zeno-Zeit τ_0 .

Näherung zum stationären Zustand. Das bedeutet für eine genügend kleine Zeno-Zeit, werden die kohärenten Oszillationen der ungestörten Bewegung vollständig gedämpft (siehe Abbildung 3). In Fall $\Omega\tau_0 \ll 1$ findet man die genäherte Lösung

$$\langle \sigma_3(t) \rangle \approx e^{-t/\tau}, \quad (4.21)$$

wobei die Zeitkonstante τ gegeben ist durch

$$\tau = \frac{2}{\Omega^2 \tau_0}. \quad (4.22)$$

Die Abklingzeit für das obere Niveau wird also indirekt proportional zur Zeno-Zeit τ_0 . Im Limes $\tau_0 \rightarrow 0$ ergibt sich $\tau \rightarrow \infty$. Dieser Grenzwert ergibt sich durch die unendliche Genauigkeit der σ_3

-Messung und das in Erscheinung treten des Quanten-Zeno-Effekts: Die Lebensdauer des oberen Niveaus wird unendlich, das heißt das beobachtete System bleibt in seinem Anfangszustand. Zum Abschluss sei angemerkt, dass der Quanten-Zeno-Effekt auch experimentell an einem ähnlichen System nachgewiesen wurde (Itano, Heinzen, Bollinger und Wineland, 1990).

A Zerfall eines 2-Niveau-Systems

Das einfachste quantenmechanische System ist ein 2-Niveau-System dessen Hilbertraum durch zwei Zustände aufgespannt wird. Diese Zustände sind zum einen der Grundzustand $|g\rangle$ und zum anderen der angeregte Zustand $|e\rangle$. Der Hilbertraum eines solchen System ist äquivalent zum jenem eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Systems. Die Pauli-Operatoren, gegeben durch

$$\sigma_1 = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, \quad \sigma_2 = -i|e\rangle\langle g| + i|g\rangle\langle e|, \quad \sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (\text{A.1})$$

erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (\text{A.2})$$

sowie die Antikommutatorrelationen

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

Weiters ist es günstig auch die Operatoren

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e| = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) \quad (\text{A.4})$$

zu definieren. Die entsprechende Matrixdarstellung dieser Operatoren in der Basis $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ ist

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

und

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Wir nehmen den freien Hamiltonoperator H_S des Systems als diagonal in der obigen Basis an. Mit einer geeigneten Wahl der Grundzustandsenergie erhalten wir

$$H_S = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_3, \quad (\text{A.7})$$

wobei $\omega_0 > 0$ die Übergangsfrequenz ist. Weiters haben wir $\hbar = 1$ gesetzt. Im Folgenden werden wir im Wechselwirkungsbild arbeiten.

Physikalisch ergibt sich ein 2-Niveau-System immer wenn die Dynamik des entsprechenden Systems auf einen zweidimensionalen Unterraum beschränkt ist. Das bedeutet Übergänge zu anderen Niveaus können vernachlässigt werden. Um etwas konkreter zu werden betrachten wir hier die Dynamik eines 2-Niveau-Atoms mit einer Übergangsfrequenz ω_0 im optischen Bereich. Die Pauli-Operatoren σ_{\pm} repräsentieren in diesem Fall Eigenoperatoren des Hamiltonoperators für das System. Das heißt es gilt

$$[H_S, \sigma_-] = -\omega_0\sigma_-, \quad [H_S, \sigma_+] = +\omega_0\sigma_+ \quad (\text{A.8})$$

und σ_{\pm} ändert die Energie um den Betrag $\pm\omega_0$, entsprechend den Absorptions- und Emissionsprozessen. Das bedeutet wir haben zwei Lindbladoperatoren

$$\vec{A}(\omega_0) \equiv \vec{A} = \vec{d}\sigma_-, \quad \vec{A}(-\omega_0) \equiv \vec{A}^\dagger = \vec{d}^*\sigma_+, \quad (\text{A.9})$$

wobei $\vec{d} = \langle g|\vec{D}|e\rangle$ das Übergangsmatrixelement des Dipoloperators ist (es wird angenommen, dass die Diagonalelemente des Dipoloperators verschwinden). In der 2-Niveau-Näherung kann der Dipoloperator im Wechselwirkungsbild geschrieben werden als

$$\vec{D}(t) = \vec{d}\sigma_- e^{-i\omega_0 t} + \vec{d}^*\sigma_+ e^{+i\omega_0 t}. \quad (\text{A.10})$$

Wenn man die Beiträge aus Lamb- und Stark-Shift vernachlässigt können wir die quantenoptische Master-Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & \gamma_0(N+1) \left(\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_+ \sigma_- \right) \\ & + \gamma_0 N \left(\sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_- \sigma_+ \right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

mit der spontanen Emissionsrate

$$\gamma_0 = \frac{4\omega_0^3 |d|^2}{3\hbar c^3}. \quad (\text{A.12})$$

schreiben. Der Dissipator der Master-Gleichung beschreibt spontane Emissionsprozesse (mit Rate γ_0), sowie thermisch induzierte Emissions- und Absorptionsprozesse (mit Raten $\gamma_0 N$). Die gesamte Übergangsrate wird mit

$$\gamma = \gamma_0(2N+1) \quad (\text{A.13})$$

bezeichnet, wobei $N = N(\omega_0)$ die Planck-Verteilung bei der Übergangsfrequenz beschreibt. Um Gleichung (A.11) zu lösen, ist es günstig die Dichtematrix darzustellen als

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \langle \vec{\sigma}(t) \rangle \cdot \vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_3(t) \rangle) & \langle \sigma_-(t) \rangle \\ \langle \sigma_+(t) \rangle & \frac{1}{2}(1 - \langle \sigma_3(t) \rangle) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

wobei der Vektor

$$\vec{v}(t) \equiv \langle \vec{\sigma}(t) \rangle = \text{tr}\{\vec{\sigma}\rho(t)\}. \quad (\text{A.15})$$

als *Bloch-Vektor* bezeichnet wird. Dieser reelle 3-Vektor genügt der Bedingung $|\vec{v}(t)| \leq 1$. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass $\rho(t)$ positiv sein muss. Für $|\vec{v}(t)| < 1$ beschreibt die dazugehörige Dichtematrix einen echten Mischzustand, während ein Bloch-Vektor der $|\vec{v}(t)| = 1$ erfüllt, einen Reinzustand beschreibt. Daraus sehen wir, dass der Satz von Dichtematrizen des 2-Niveau-Systems isomorph zur Einheitskugel, bekannt als *Bloch-Kugel*, sein muss. Die Oberfläche der Bloch-Kugel ist dabei äquivalent dem Satz von Reinzuständen.

Die Matrixelemente $\rho_{11}(t) = p_e(t)$ und $\rho_{22}(t) = p_g(t)$ sind die Entwicklungen des angeregten und des Grundzustandes. Die Nebendiagonalelemente $\rho_{12}(t) = \rho_{21}^*(t)$ sind die Kohärenzen, gegeben durch die Erwartungswerte der Auf- und Absteigeoperatoren σ_{\pm} . Mithilfe der Algebra für die Pauli-Matrizen kann man die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_1(t) \rangle = -\frac{\gamma}{2}\langle \sigma_1(t) \rangle, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_2(t) \rangle = -\frac{\gamma}{2}\langle \sigma_2(t) \rangle, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_3(t) \rangle = -\gamma\langle \sigma_3(t) \rangle - \gamma_0 \quad (\text{A.18})$$

herleiten. Man sieht, dass die dritte Komponente des Bloch-Vektors exponentiell mit einer Rate γ zerfällt, während die Kohärenzen $\langle \sigma_{\pm}(t) \rangle$ mit einer Rate von $\gamma/2$ abnehmen. Die stationäre Lösung ist gegeben durch

$$\langle \sigma_1 \rangle_s = \langle \sigma_2 \rangle_s = 0, \quad \langle \sigma_3 \rangle_s = -\frac{\gamma_0}{\gamma} = -\frac{1}{2N+1}, \quad (\text{A.19})$$

und die stationäre Entwicklung des oberen Niveaus ist

$$p_e^s = \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_3 \rangle_s) = \frac{N}{2N+1}. \quad (\text{A.20})$$

Wenn wir zum Beispiel den Anfangszustand $\rho(0) = |g\rangle\langle g|$ wählen, erhalten wir die entsprechende zeitabhängige Lösung

$$\langle \sigma_3(t) \rangle = -e^{-\gamma t}(1 + \langle \sigma_3 \rangle_s) + \langle \sigma_3 \rangle_s, \quad (\text{A.21})$$

$$p_e(t) = p_e^s(1 - e^{-\gamma t}). \quad (\text{A.22})$$

Literatur

- [1] H.-P.Breuer and F. Petruccione, editors. *The Theory Of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, Oxford, 2006.