Karl-Franzens Universität Graz
Institut für Physik

SEMINARARBEIT

Der formale Unterbau des dynamischen Gesetzes in der nichtrelativistischen Quantenmechanik

Erstellt im Rahmen der Lehrveranstaltung *Seminar Quantenphysik*
Prof. Plessas

von

Andreas Windisch, 0610810

Graz, am 22. April 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Seminararbeit soll der mathematische Unterbau der quantenmechanischen Theorie beleuchtet werden. Besonderes Augenmerk wird dabei auf das dynamische Gesetz gelegt, die Betrachtung gipfelt schließlich im Beweis der Existenz des Zeitentwicklungsoperators.
Als ich mich der Erörterung dieses Themas zuwandte musste ich mit einigem Schrecken feststellen, dass ich sowohl den Umfang als auch die Tiefe der zugrundeliegenden Materie unterschätzt habe. Um nun dem Umstand Rechnung zu tragen, dass dies ein maximal eineinhalbstündiger Vortrag werden soll müssen gewaltige Streichungen vorgenommen werden, die dem Erkennen der Zusammenhänge natürliche Schranken bieten. Dennoch sollen alle Begriffe die essentiell sind mitgenommen und sauber definiert werden. Dies führt mich auch gleich zu der Gliederung der vorliegenden Schrift. Diese besteht im wesentlichen aus drei Teilen, wobei die ersten beiden den Unterbau der Theorie beleuchten, während der dritte Teil sich mit dem eigentlichen, zentralen Thema befasst, dem dynamischen Gesetz. Leider bekommt man die für das Verständnis des Beweises der Existenz des Zeitentwicklungsoperators notwendigen Begriffe nicht gerade billig serviert, deshalb werden im ersten Teil Definitionen gegeben, die für die spätere Betrachtung relevant und notwendig sind. Dabei mag es oft so scheinen, dass die Definitionen scheinbar willkürlich aus allen möglichen Richtungen auf den Betrachter niederprasseln, und in der Tat ist dieser Umstand nicht ganz von der Hand zu weisen; allerdings ist eben dies Indiz dafür, wie komplex und vielseitig der notwendige Unterbau ist den es zu Durchmessen gilt, ehe man mit dem starken Wort *Axiom 0* einen sauberen Formalismus einzuleiten in der Lage ist. Der erste Teil dient also der exakten Begriffsbildung und stellt ein einigermaßen zusammenhängendes Gebäude dar. Hat man sich nun diese Vielzahl von Begriffen, in welcher Form und Tiefe auch immer, vergegenwärtigt, so gilt es, sich ans Einrichten des Gebäudes zu machen, soll heißen zu bestimmen in welche Ecke welches Objekt gehört und wie sie zusammenwirken. Auf diese Problematik soll im zweiten Abschnitt eingegangen werden. Dabei werden die Begriffe aus dem ersten Teil auf einige wenige zentrale Elemente reduziert, und es wird, ähnlich einem Hesse'schen Glasperlenspiele, das Augenmerk auf die Zusammenhänge der Konstruktionskomponenten gelegt.
Schließlich, im letzten Teil, wird, nun wieder in mathematischer Manier, die Axiomatik begründet, und der zentrale Beweis dieser Schrift geführt. Um nur einen kurzen Überblick zu erlangen mag es ausreichen nur den zweiten und dritten Abschnitt zu betrachten. Interessiert man sich detaillierter für den einen oder anderen Begriff, so kann dieser im ersten Abschnitt nachgeschlagen werden. Reicht dies noch immer nicht aus, so sei dem geneigten Leser als Lektüre *Quantum Mechanics in Hilbert Space, Eduard Prugovečki, ACADEMIC PRESS New York and London, 1971* empfohlen. Dieses Buch ist auch die Grundlage für diese Ausarbeitung, alle Definitionen und Sätze wurden daraus übernommen.
Zum Schluss sei noch der Anhang erwäht, der eine Beschreibung der verwendeten Symbole beinhaltet und eventuell Klärung bietet, falls der Überblick auf Kosten des Umfanges auf der Strecke geblieben ist.

2 Wichtige Definitionen und Aussagen

2.1 Metrik, Norm, Skalarprodukt

Beginnen wir mit einigen elementaren Definitionen.

Definition 1. *Ein Euklid'scher Raum (auch innerer Produkt-Raum bzw. unitärer Raum) $\mathcal{E}$ ist ein Vektorraum auf dem ein inneres Produkt definiert ist. Der Euklid'sche Raum heißt reel (komplex), falls der Vektorraum auf dem das innere Produkt definiert ist reel (komplex) ist.*

Ein inneres Produkt ist ferner wie folgt definiert:

Definition 2. *Ein inneres Produkt (Skalarprodukt) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ auf dem komplexen Vektorraum $\mathcal{V}$ bildet $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ nach $\mathbb{C}^1$ ab:*
$(f, g) \to \langle f|g\rangle, \quad (f, g) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \quad \langle f|g\rangle \in \mathbb{C}^1$, und erfüllt folgende Bedingungen:

1. $\langle f|f\rangle > 0, \quad \forall f \neq 0,$
2. $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^*,$
3. $\langle f|ag\rangle = a\langle f|g\rangle, \quad a \in \mathbb{C}^1,$
4. $\langle f|g + h\rangle = \langle f|g\rangle + \langle f|h\rangle.$

Eine nützliche Ungleichung ist in folgendem Satz festgehalten.

Satz 1. *Zwei beliebige Elemente f, g eines Euklid'schen Raumes $\mathcal{E}$ genügen der Schwarz-Cauchy Ungleichung:*
$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle.$

Beweis
Für beliebige gegebene $f, g \in \mathcal{E}$, und für eine beliebige komplexe Zahl a, folgt aus der Definition der Norm, erste Eigenschaft:
$\langle f + ag|f + ag\rangle \geq 0$. Wählt man nun a mit $a = \lambda\frac{\langle f|g\rangle^*}{|\langle f|g\rangle|}, \quad \lambda = \lambda^*$ so folgt die Ungleichung
$g(\lambda) = \lambda^2\langle g|g\rangle + 2\lambda|\langle f|g\rangle| + \langle f|f\rangle \geq 0$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung der Ungleichung ist, dass die Diskriminante der quadratischen Gleichung negativ ist:
$|\langle f|g\rangle|^2 - \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \leq 0$, womit die Schwarz-Cauchy Ungleichung bewiesen ist. $\square$

Wir wollen im Folgenden ausschließlich komplexe Euklid'sche Räume betrachten. Um nun zum Hilbertraum zu gelangen müssen noch weitere Begriffe eingeführt werden. Zunächst kann erst ein Konvergenzbegriff gebildet werden, wenn eine Norm definiert ist.

Definition 3. *Eine Abbildung $f \to ||f||, \quad f \in \mathcal{V}, \quad ||f|| \in \mathbb{R}^1$*
von einem komplexen Vektorraum hinein in die reellen Zahlen heißt Norm, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $||f|| > 0 \quad \forall f \neq \boldsymbol{0},$
2. $||\boldsymbol{0}|| = 0,$
3. $||af|| = |a| \; ||f|| \quad \forall a \in \mathbb{C}^1,$
4. $||f + g|| \leq ||f|| + ||g|| \quad$ (*Dreiecksungleichung*).

Ohne Beweis wollen wir festhalten, dass ein Euklid'scher Raum mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle$ eine Norm induziert die gegeben ist durch:

$$||f|| = \sqrt{\langle f|f\rangle} \tag{1}$$

Der Beweis ist straightforward, einzig die Dreiecksungleichung bedarf einer näheren Betrachtung, für die die Schwarz-Cauchy Ungleichung herangezogen werden muss.
Wir fahren fort in der Begriffsbildung.

Definition 4. *Sei S gegebene Menge. Eine Funktion $d(\xi, \eta)$ auf $S \times S$ heißt Metrik, wenn folgende Eigenschaften für alle $\xi, \eta, \zeta \in S$ erfüllt sind:*

1. $d(\xi, \eta) > 0 \quad$ *wenn* $\xi \neq \eta$,
2. $d(\xi, \xi) = 0$,
3. $d(\xi, \eta) = d(\eta, \xi)$,
4. $d(\xi, \zeta) \leq d(\xi, \eta) + d(\eta, \zeta) \quad$ *(Dreiecksungleichung).*

Eine Menge S auf der eine Metrik definiert ist heißt metrischer Raum.

Damit lässt sich ein Konvergenzbegriff fassen.

Definition 5. *Eine unendliche Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ in einem metrischen Raum $\mathcal{M}$ heißt konvergent zum Punkt $\xi \in \mathcal{M}$, falls $\forall \epsilon > 0 : \exists N_{(\epsilon)} > 0 : d(\xi, \zeta_n) < \epsilon \quad \forall n > N_{(\epsilon)}$. Eine unendliche Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ heißt Cauchy-Folge, falls $\forall \epsilon > 0 : \exists M_{(\epsilon)} > 0 : \forall m, n > M_{(\epsilon)} : d(\xi_m, \xi_n) < \epsilon$.*

Da wir nun um Konvergenz wissen, können wir uns dem Begriff der Vollständigkeit zuwenden.

Definition 6. *Ein metrischer Raum $\mathcal{M}$ heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge zu einem Element aus $\mathcal{M}$ konvergiert.*

Diese Konzepte führen uns nun zum Begriff des Hilbertraumes. Wir beginnen mit einer Überlegung zu normierten Räumen. Jeder normierte Raum induziert eine Metrik, die gegeben ist durch:

$$d(f, g) = ||f - g|| \tag{2}$$

In diesem Sinne können wir die Begriffe der Konvergenz und der Vollständigkeit im Sinne der Norm übernehmen. Starten wir dabei von einem normierten Raum, und vervollständigen diesen durch Hinzunehmen aller Grenzwerte aller Cauchy-Folgen, so erhalten wir einen vollständigen, normierten Raum (Banach-Raum). Beginnen wir aber bei einem Eukild'schen Raum, dessen Skalarprodukt eine Norm induziert und dessen Norm eine Metrik induziert, und vervollständigen diesen, so gelangen wir zum Hilbertraum, in dem wir unsere weitere Arbeit fortsetzen wollen.

2.2 Definitionen und Begriffe aus der Maßtheorie

Da wir Hilberträume studieren wollen ist es notwendig sich mit der Theorie von Integralen, insbesondere mit der des Lebesgue-Integrals vertraut zu machen. Dazu werden wir vorerst die grundlegenden Konzepte des Maßraumes definieren bzw. betrachten, um im Folgenden auf die Integration in solchen Räumen eingehen zu können.
Die physikalische Interpretation der Wellenmechanik wird auf einem Intervall I über die Wahrscheinlichkeit das System im Intervall I zur Zeit t zu finden erhalten:

$$P_t(I) = \int_I |\psi(x, t)|^2 dx \tag{3}$$

Formel (3) ist ein Beispiel für eine sogenannte Mengenfunktion. Eine Mengenfunktion ist eine Funktion, deren Definitionsbereich ein System von Mengen ist. Wir interessieren uns für eine spezielle Klasse von Mengenfunktionen, die Maße. Dafür müssen wir zuerst das Konzept des Maßraumes einführen. Im Falle der Maßräume haben wir mit einer Menge $\mathcal{X}$ zu tun, auf der eine bestimmte Struktur lebt. Diese Struktur wird durch ein System von Untermengen von $\mathcal{X}$ bestimmt, die bestimmten Axiomen gehorchen: die Boole'sche σ-Algebra.

Definition 7. *Eine nichtleere Klasse $\mathcal{K}$ von Untermengen einer Menge $\mathcal{X}$ heißt Boole'sche Algebra, wenn*

$$R \cup S \in \mathcal{K}, \quad R, S \in \mathcal{K} \tag{4}$$

$$R' \in \mathcal{K}, \quad R \in \mathcal{K} \tag{5}$$

mit $R' = \mathcal{X} - R$ ist das Komplement von R bzgl. $\mathcal{X}$. Die Klasse $\mathcal{K}$ von Untermengen von $\mathcal{X}$ heißt Boole'sche σ-Algebra, falls zusätzlich zu den Eigenschaften der Boole'schen Algebra noch gilt: $\cup_{k=1}^{\infty} S_k$ für jede abzählbare Anzahl von Mengen $S_1, S_2, \ldots$ von $\mathcal{K}$ gehört auch zu $\mathcal{K}$.

Es gibt nun eine ganze Reihe von Aussagen und Sätze über diese Objekte, auf die wir aber nicht weiter eingehen wollen. Wir sehen uns gleich das Prinzip des Maßes und des Maßraumes an. Wir betrachen wieder eine Mengenfunktion, die eine Abbildung eines Systems $\mathcal{K}$ von Mengen nach $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{C}^1$ ist.

Definition 8. *Eine Mengenfunktion $F(S)$, $S \in \mathcal{K}$, heißt additiv, falls für alle disjunkten $S_1, S_2 \in \mathcal{K}$ gilt:*

$$F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) + F(S_2)$$

Sie heißt σ-additiv, falls für jedes abzählbare System $S_1, S_2, \ldots$ von disjunkten Mengen in $\mathcal{K}$ gilt:

$$F(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) = F(S_1) + F(S_2) + \ldots.$$

Definition 9. *Eine zu einer Boole'schen σ-Algebra gehörende Menge $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{I}^n)$, generiert durch $\mathcal{I}^n$, heißt Borel Menge in n Dimensionen.*

Wenden wir uns nun einem der zentralen Begriffe zu.

Definition 10. *Ein Maß $\mu(S)$ ist eine erweiterte, reellwertige Mengenfunktion, deren Definitionsbereich eine Boole'sche σ-Algebra ist, und die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(S) \geq 0 \quad \forall S \in \mathcal{A}$,
3. $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} S_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k) \quad$ *mit* $\quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad$ *wenn* $\quad i \neq j$.

Die Eigenschaft 'erweitert' zeigt an, dass für manche Mengen $S \in \mathcal{A}$ das $\mu(S) = +\infty$ sein kann. Wir definieren die formalen Operationen auf $\mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ mit $a + \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ *wenn* $a > 0$, sowie $0 \cdot \infty = 0$, und $a/\infty = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$.

Definition 11. *Ein Maßraum $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein messbarer Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, für den ein Maß $\mu(S)$ auf der Boole'schen σ-Algebra $\mathcal{A}$ definiert ist. Für jedes $S \in \mathcal{A}$ heißt die Zahl $\mu(S)$ das Maß der Menge S. Wenn $\mu(S) < +\infty$ spricht man von einem endlichen Maß. Wenn die Menge S aus einer abzählbaren Vereinigung $\cup_{n=1}^{\infty} S_n$ von Mengen S_n mit endlichen Maßen besteht, so heißt das Maß $\mu(S)$ von S σ-endlich.*

Definition 12. *Eine reellwertige Funktion $f(\xi)$, $\xi \in \mathcal{X}$, definiert auf einer messbaren Untermenge R des messbaren Raumes $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \mathcal{A})$, heißt messbar auf R, falls für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}^1$ die Menge*

$$f^{-1}(I) = \{\xi : \xi \in R, f(\xi) \in I\} \tag{6}$$

auf $\mathcal{X}$ messbar ist, dh. zu $\mathcal{A}$ gehört.
Damit folgt ein weiterer wichtiger Begriff. Wenn $f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, messbar ist in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, wobei $\mathcal{B}^n$ die Familie aller Borelmengen ist, dann ist $f(\xi)$ Borelmessbar.

In ähnlicher Weise läßt sich der Begriff der Lebesguemessbarkeit einführen, dies wird hier aber nicht ausgeführt.

Definition 13. *Eine Funktion $f(\xi)$ auf einem messbaren Raum heißt einfach, wenn sie von folgender Form ist:*

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{S_k}(\xi), \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad f\ddot{u}r \quad i \neq j,$$

mit $a_1, \ldots, a_n$ sind i.a. komplexe Zahlen, und $\chi_{S_k}(\xi)$ ist die charakteristische Funktion der Untermenge S_k, welche 1 liefert wenn $\xi \in S$ und 0 sonst.

Diese Definitionen öffnen nun Tür und Tor für den Begriff der Integrabilität.

Definition 14. *Eine einfache Funktion, definiert auf einer messbaren Menge R des Maßraumes $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ heißt integrabel auf R, wenn*

$$\mu(R \cup \{\xi : s(\xi) \neq 0\}) < \infty. \tag{7}$$

Das entsprechende Integral bzgl μ ist dann definiert durch

$$\int_R s(\xi) d\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(S_k \cap R). \tag{8}$$

Bevor wir das Theorem von Riesz-Fischer (ohne Beweis) betrachten, müssen wir uns folgende Definition verinnerlichen:

Definition 15. *Eine Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots \in L_{(2)}(\Omega, \mu)$ heißt fundamental im Mittel, wenn:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) > 0 : \int_\Omega |f_m(x) - f_n(x)|^2 d\mu(x) < \epsilon \quad \forall m, n > N(\epsilon).$$

Eine solche Folge konvergiert im Mittel gegen $f(x) \in L_{(2)}(\Omega, \mu)$, wenn

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega |f(x) - f_n(x)|^2 d\mu(x) = 0.$$

Wir notieren den Limes mit l.i.m. . Weiters gilt für jedes $f(x) \in L_{(2)}(\Omega, \mu)$

$$||f||^2 = \langle f|f \rangle = \int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x).$$

Wenn also $f_1(x), f_2(x), \ldots$ fundamental im Mittel ist, dann ist $f_1, f_2, \ldots \in L^2(\Omega, \mu)$ eine Cauchy-Folge in der Norm von $L^2(\Omega, \mu)$, und die Konvergenz im Mittel entspricht der Konvergenz gemäß der Norm in $L^2(\Omega, \mu)$.

Satz 2 (Riesz-Fischer)**.** *Ist eine Folge $f_1(x), f_2(x), \ldots \in L_{(2)}(\Omega, \mu)$ fundamental im Mittel, dann konvergiert sie im Mittel gegen eine Funktion $f(x) \in L_{(2)}(\Omega, \mu)$.*

Der Beweis ist zwar wichtig, aber auch länglich, und wird aus diesem Grunde hier ausgespart. Wir haben wieder ein großes Stück geschafft und sehen uns weitere Begriffe an.

Definition 16. *Eine Bilinearform $(\cdot|\cdot)$ auf einem Vektorraum $\mathcal{V}$ ist eine komplexwertige Funktion definiert auf $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, mit den Eigenschaften für beliebige $f, g, h \in \mathcal{V}$, und jede komplexe Zahl a:*

1. $(f|ag) = a(f|g) = a^*(f|g)$
2. $(f|g + h) = (f|g) + (f|h)$
3. $(f + g|h) = (f|h) + (g|h)$

Eine Bilinearform $(f|g)$ heißt hermite'sch, wenn für alle $f, g \in \mathcal{V}$

$$(f|g) = (g|f)^*.$$

Eine hermite'sche Bilinearform heißt positiv definit, wenn für alle $f \in V$

$$(f|f) \geq 0.$$

Definition 17. *Seien $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ Hilberträume mit inneren Produkten $\langle\cdot|\cdot\rangle_1, \ldots, \langle\cdot|\cdot\rangle_n$. Im algebraischen Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes_a \ldots \otimes_a \mathcal{H}_n$ von $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, ist das innere Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gegeben durch*

$$\langle f|g\rangle = \prod_{k=1}^{n} \langle f^{(k)}|g^{(k)}\rangle_k \tag{9}$$

für f, g der Form

$$f = f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(n)}, \quad g = g^{(1)} \otimes \ldots \otimes g^{(n)}.$$

2.3 Theorie linearer Operatoren

Linearität von Operatoren, aber auch andere Eigenschaften wie zum Beispiel beschränkte oder auch selbstadjungierte Operatoren spielen eine wichtige Rolle in der Quantentheorie. Diese Eigenschaften werden in diesem Abschnitt auf eine allgemeine Weise diskutiert. Schließlich bauen wir die für die Existenz des Zeitentwicklungsoperators zentrale Aussage aus diesen Begriffen auf: das Spektraltheorem.
Definieren wir also weitere Begriffe.

Definition 18. *Eine Abbildung $f \to f' = A(f), \quad f \in \mathcal{V}_1, \quad f' \in \mathcal{V}_2$, vom Vektorraum $\mathcal{V}_1$ über dem Körper $\mathcal{F}$ hinein in den Vektorraum $\mathcal{V}_2$ über demselben Körper $\mathcal{F}$ heißt lineare Transformation (linearer Operator, falls $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$), falls*

$$A(af + bg) = aA(f) + bA(g)$$

für alle $a, b \in \mathcal{F}$, und für alle $f, g \in \mathcal{V}_1$.

Definition 19. *Eine Algebra über einem Körper $\mathcal{F}$ ist ein linearer Raum $\mathcal{U}$ über diesem Körper auf dem zusätzlich zu den Vektoroperationen eine Operation, die algebraische Multiplikation definiert ist. Eine algebraische Multiplikation ist eine Abbildung*

$$(A, B) \to AB, \quad (A, B) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}, \quad AB \in \mathcal{U},$$

von $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ mit den Eigenschaften

1. *$(AB)C = A(BC)$, Assoziativität,*
2. *$(A + B)C = AC + BC, C(A + B) = CA + CB$, Distributivität,*
3. *$a(AB) = (aA)B = A(aB)$, Assoziativität der Skalarmultiplikation,*

für alle $A, B, C \in \mathcal{U}$ und für alle Elemente $a \in \mathcal{F}$.

Definition 20. *Eine Transformation $f \to T(f), \quad f \in \mathcal{N}_1, \quad Tf \in \mathcal{N}_2$, auf dem normierten Raum $\mathcal{N}_1$ hinein in den normierten Raum $\mathcal{N}_2$ heißt stetig in f_0, $f_0 \in \mathcal{N}_1$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon)$ existiert, so dass*

$$||T(f) - T(f_0)||_2 < \epsilon \quad \text{für} \quad ||f - f_0||_1 < \delta(\epsilon), \tag{10}$$

mit $||h||_i$ Norm von $h \in \mathcal{N}_i, \quad i = 1, 2$. Die Transformation heißt stetig, wenn sie in allen Punkten $f_0 \in \mathcal{N}_1$ stetig ist.

Definition 21. *Eine Menge S in einem normierten Raum $\mathcal{N}$ ist beschränkt, wenn es eine Konstante C gibt, so dass $||f|| \leq C$ für alle $f \in S$. Eine Transformation T von $\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ heißt beschränkte Transformation, wenn sie jede beschränkte Menge in $\mathcal{N}_1$ in eine beschränkte Menge in $\mathcal{N}_2$ abbildet.*

In ähnlicher Weise können wir diese Eigenschaften auch für Funktionale definieren.

Definition 22. *Ein Funktional Φ,*

$$\Phi : f \to \Phi(f), \quad f \in \mathcal{N}, \quad \Phi(f) \in \mathbb{C}^1,$$

definiert auf dem normierten Raum $\mathcal{N}$, ist stetig im Punkt $f_0 \in \mathcal{N}$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon)$ existiert, so dass $|\Phi(f) - \Phi(f_0)| < \epsilon$ für alle $||f - f_0|| < \delta(\epsilon)$.
Das Funktional Φ heißt stetig, falls es stetig in jedem Punkt von $\mathcal{N}$ ist. Φ heißt beschränkt, wenn es jede beschränkte Menge aus $\mathcal{N}$ in eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{C}^1$ abbildet.

Definition 23. *Das Funktional Φ, definiert auf dem reellen oder komplexen Vektorraum $\mathcal{V}$ heißt linear, falls*

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g), \quad \Phi(af) = a\Phi(f),$$

für alle $f, g \in \mathcal{V}$ und alle Skalare a aus $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{C}^1$.

Ein bekanntes Theorem sei hier noch angegeben, allerdings wieder ohne Beweis.

Satz 3 (Riesz)**.** *Zu jedem stetigen, linearen Funktional Φ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ existiert ein eindeutiger Vektor $g \in \mathcal{H}$, so dass*

$$\Phi(f) = \langle g|f\rangle \tag{11}$$

für alle $f \in \mathcal{H}$.

Definition 24. *Ein linearer Operator A in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine lineare Transformation von einem linearen Unterraum $\mathcal{D}_A$ von $\mathcal{H}$ hinein nach $\mathcal{H}$. $\mathcal{D}_A$ heißt dann Definitionsbereich von A und das Bild unter A*

$$\mathcal{R}_A = \{Af : f \in \mathcal{D}_A\}$$

heißt der Wertebereich von A.

Definition 25. *Ein linearer Operator A auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt abgeschlossen, wenn, wann immer $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{D}_A$ gegen einen Vektor $f \in \mathcal{H}$ konvergiert, und $Af_1, Af_2, \ldots$ auch gegen einen Vektor $h \in \mathcal{H}$ konvergiert, $f \in \mathcal{D}_A$ und $h = Af$ ist.*

Definition 26. *Ein linearer Operator A auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt symmetrisch, falls es einen adjungierten Operator A^* gibt und wenn $A \subseteq A^*$. Ein symmetrischer Operator heißt selbstadjungiert, falls $A^* \subseteq A$ bzw. $A \equiv A^*$.*

Satz 4. *Das Produkt $E_M E_N$ zweier Projektionen E_M und E_N auf $\mathcal{H}$ ist dann und nur dann ein Projektor, falls E_M und E_N kommutieren, d.h.*

$$E_M E_N = E_N E_M.$$

Dann ist die Menge $L = M \cap N$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{H}$ und

$$E_L = E_M E_N.$$

Definition 27. *Eine komplexe Zahl λ heißt Eigenwert eines linearen Operators A, mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_A$, wenn mindestens ein von Null verschiedener Vektor $f \in \mathcal{D}_A$ der Eigenwertgleichung*

$$Af = \lambda f \tag{12}$$

genügt. Jeder Vektor $f \in \mathcal{D}_A$ der diese Gleichung erfüllt heißt Eigenvektor von A mit Eigenwert λ.

Definition 28. *Ein Spektralmaß $E(S)$ auf einem messbaren Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ ist eine projektorwertige Funktion, die jedem Element S der Boole'schen σ-Algebra $\mathcal{A}$ einen Projektor $E(S)$ zuordnet, so dass*

1. $E(\mathcal{X}) = 1$,
2. $E(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) = \sum_{k=1}^{\infty} E(S_k)$, *wenn $S_1, S_2, \ldots,$ eine beliebige Folge disjunkter Mengen von $\mathcal{A}$ ist.*

Definition 29. *Eine projektorwertige Funktion $E_\lambda = E_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt Spektralfunktion, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:*

1. $E_\lambda = E_{\lambda'}$ *wenn* $\lambda \leq \lambda'$,
2. $E_\lambda = E_{\lambda+0} = s - \lim(\lambda' \to \lambda, \lambda' \geq \lambda) E_{\lambda'}$
3. $E_{-\infty} = s - \lim(\lambda \to \infty) E_\lambda = 0$ *und* $E_{+\infty} = s - \lim(\lambda \to +\infty) E_\lambda = 1$,

mit $\lambda' \geq \lambda$ für $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n), \lambda_1 \leq \lambda'_1, \ldots, \lambda_n \leq \lambda'_n$.

Definition 30. *Ein komplexes Maß $\mu(S)$ auf dem messbaren Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ ist eine endliche Linearkombination mit komplexen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_\nu$*

$$\mu(S) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} c_\alpha \mu_\alpha(S)$$

zu einer gegebenen Anzahl ν von endlichen Maßen $\mu_1(S), \ldots, \mu_\nu(S)$ auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Um später den Beweis für den Zeitentwicklungsoperator zu führen benötigen wir noch weitere Aussagen über komplexe Maße. (Die Beweise der folgenden Aussagen werden hier nicht ausgeführt).

Satz 5. *Eine projektorwertige Mengenfunktion $E(S)$, $S \in \mathcal{A}$, definiert auf dem messbaren Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ mit $E(\mathcal{X}) = 1$, ist dann und nur dann ein Spektralmaß, wenn für beliebige Vektoren f, g*

$$\mu_{f,g} = \langle f | E(S) g \rangle, \quad S \in \mathcal{A}, \tag{13}$$

ein komplexes Maß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ ist.

Definition 31. *Eine Eigenschaft eines jeden Elementes $\xi \in S$ einer messbaren Menge S im messbaren Raume $\mathcal{X}$ ist fast überall gegeben, wenn sie auf einer Menge $R \subset S$ gegeben ist, deren Komplement $S - R$ bzgl S vom Maß Null ist, dh. falls $\mu(R) = \mu(S)$.*

Satz 6. *Seien $f(\xi)$ und $g(\xi)$ messbare Funktionen, definiert auf der messbaren Menge R. Wenn $|f(\xi)| \leq g(\xi)$ fast überall auf R, und falls $g(\xi)$ auf R integrabel ist, dann ist $f(\xi)$ auf R integrabel und es gilt*

$$|\int_R f(\xi) d_\mu(\xi)| \leq \int_R |f(\xi)| d_\mu(\xi) \leq \int_R g(\xi) d_\mu(\xi).$$

3 Qualitativer Zusammenhang der Begriffe im Unterbau

In diesem Abschnitt sollen nun die im vorherigen Kapitel definierten und erwähnten Komponenten in Zusammenhang gebracht werden. Eigentlich sind nur einige wenige Begriffe notwendig um den Beweis für die Existenz des unitären Zeitenwicklungsoperators durchzubringen, allerdings hängen diese Begriffe selbst wieder von der Definition anderer Begriffe ab, und so fort. Aus zwei Gründen ist dies eine notwendige Betrachtung: Einerseits schafft sie den notwendigen Rahmen für das Verständnis des Theorems und dessen Beweises selbst, andererseits ermöglicht diese Betrachtung einen Einblick in die komplexe Struktur des Unterbaus, der, wenn auch hier weder exakt noch vollständig beschrieben, so doch in seiner Weitläufigkeit beleuchtet wird.

3.1 Lineare Algebra

Hier ist unser Ausgangspunkt. Ausgehend vom Vektorraum als solchen definieren wir ein Skalarprodukt und erlangen damit auch gleich die Objekte Norm und Metrik, die ja jeweils von der übergeordneten Struktur induziert werden. Als nächster wichtiger Begriff muss der der Vollständigkeit angegeben werden, und dazu vorerst noch eine Konvergenz eingeführt werden. Denn dann folgt sofort die Cauchy-Folge, und mit dem hinzunehmen aller Grenzwerte aller Cauchy-Folgen zum Vektorraum mit Skalarprodukt erhalten wir schließlich den Hilbertraum, der unsere Theorie aufnimmt. Mit den sogenannten Strahlen im Hilbertraum finden wir die erste Identifikation mit physikalischen Objekten vor, den Reinzustand.

3.2 Funktionalanalysis

Hier kommt ein weiteres, elemntares Objekjt ins Spiel: Der lineare Operator, der auf einem Hilbertraum lebt und den zugrundeliegenden Raum auf sich selbst abbildet. Wir haben ferner die Eigenschaften symmetrisch, beschränkt bzw. selbstadjungiert eingeführt. Zusammen mit dem Eigenwertbegriff können wir die zweite fundamentale Identifikation vornehmen: der des Messwertes als Eigenwert eines selbstadjungierten Operators bzw. den selbstadjungierten Operator als Observable.

3.3 Maßtheorie

Mit der Maßtheorie gewinnt man zunächst über die Objekte Boole'sche Algebra bzw. Boole'sche σ-Algebra das Maß (eigentlich findet man in der Literatur Borel-Algebra bzw. Borel σ-Algebra, aber ich habe mich nach dem Buch *Quantum Mechanics in Hilbert Space* gehalten, in dem diese Begriffe wie eben oben genannt eingeführt werden). Mit dem Maß ist man nun in der Lage zu integrieren.

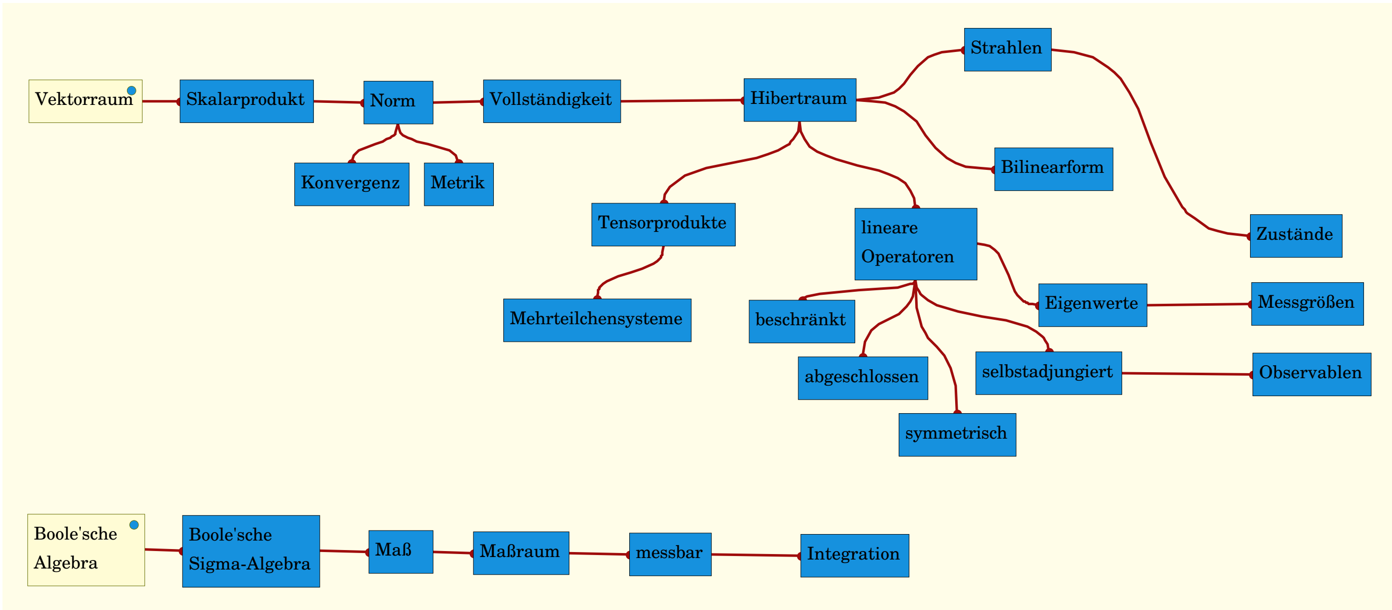

Abbildung 1: Überblick über einige Begriffe und deren Zusammenhänge

4 Axiomatik und Dynamik

Mit all diesen Formalismen sind wir nun in der Lage eine entsprechende Axiomatik zu begründen, einer sehr allgemeinen Formulierung der Quantenmechanik. Dazu betrachten wir die Theorie der Messung in der Quantenmechanik, die das theoretische Konstrukt mit dem Experiment verknüpft.

4.1 Observable

Nehmen wir an, wir hätten ein bestimmtes quantenmechanisches Problem mit einem bestimmten Hilbertraum $\mathcal{H}$ verknüpft, der sich für dieses Problem eignet. Zum Beispiel das Wasserstoffatom mit dem Raum $L^2(\mathbb{R}^6)$. Wir postulieren, dass in diesem Formalismus jede Observable in eindeutiger Weise einem selbstadjungierten Operator auf $\mathcal{H}$ zugeordnet werden kann. Umgekehrt bedeutet dies allerdings nicht, dass jedem selbstadjungierten Operator eine Observable entspricht. Ein Beispiel für eine Observable dieses Systems wäre etwa der Operator H', dessen Definitionsbereich $\mathcal{D}_{H'} = \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^6)$ ist und der ein $\psi \in \mathcal{D}_{H'}$ abbildet wie

$$(H'\psi)(x) = (-\frac{\hbar^2}{2m_1}\triangle_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\triangle_2 + V(x))\psi(x). \tag{14}$$

Der selbstadjungierte Operator H wird dabei mit der Gesamtenergie des Systems identifiziert. Allgemein lässt sich aussagen, dass es Korrespondenzregeln gibt, die festlegen welcher selbstadjungierte Operator welcher bestimmten Observablen eines Systems zuzuordnen ist. Diese Regeln verknüpfen Formalapparat mit dem experimentellen Rahmen. Als fundamentale Observablen kennen wir etwa Energie, Ort, Impuls, Drehimpuls, Spin und Ladung.

4.2 Kompatible Operatoren

Sei A selbstadjungierter Operator, der einer Observablen A des Systems entspricht, und sei $E(B), B \in \mathcal{B}^1$ das Spektralmaß von A

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Der Zustand des Systems sei zum Zeitpunkt t bekannt und beschrieben durch den normierten Vektor $\psi(t)$. Im konkreten Falle, dass A dem Ortsoperator entspricht, interpretieren wir das Maß

$$P^A_{\psi(t)}(B) = \langle\psi(t)|E(B)\psi(t)\rangle, \quad B \in \mathcal{B}^1 \tag{15}$$

als Wahrscheinlichkeitsmaß wie folgt: Eine Messung um den Wert von A zum Zeitpunkt t zu bestimmen hat die Wahrscheinlichkeit $P^A_{\psi(t)}(B)$ und liefert einen Wert aus B. Eine Verallgemeinerung dieser Interpretation führt zum Begriff der kompatiblen Observablen.

Definition 32. *Die Observablen $A_1, \dots, A_n$, bezogen auf ein bestimmtes System, heißen kompatibel, wenn im Prinzip beliebig genaue Messungen der Werte der Observablen simultan ausgeführt werden können. D.h., wenn alle $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)} \in \mathbb{R}^1$ bzw. alle Fehlergrenzen ϵ a priori bekannt sind, dann kann im Prinzip ein Apparat konstruiert werden der eine simultane Messung der Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der $A_1, \dots, A_n$ vornimmt bzw. diese innerhalb eines n-dimensionalen Rechtecks mit Seitenlänge 2ϵ bestimmt:*

$$\lambda_k^{(0)} - \epsilon \leq \lambda_k^{(0)} \leq \lambda_k^{(0)} + \epsilon, \quad k = 1, \dots, n.$$

Eine grundlegende Eigenschaft quantenmechanischer Theorien ist jene, dass wenn n Observablen $A_1 \dots, A_n$ kompatibel sind, die entsprechenden Operatoren miteinander kommutieren. Dabei ist zu beachten, dass in dieser allgemeinen Sicht die Operatoren $A_1, \dots, A_n$ nicht notwendigerweise beschränkte Operatoren sind und so möglicherweise nicht auf dem ganzen Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert sind bzw. also a priori nicht davon ausgegangen werden kann, dass

$$[A_i, A_k] = A_iA_k - A_kA_i$$

auf einem Definitionsbereich definiert ist, der dicht in $\mathcal{H}$ ist.

Diese Problematik kann jedoch Umgangen werden, wenn man folgendes Konzept einführt.

Definition 33. *Man sagt zwei selbstadjungierte Operatoren A_1, A_2 kommutieren, falls ihre Spektralmaße $E^{(1)}(B)$ und $E^{(2)}(B)$ kommutieren, d.h.*

$$[E^{(1)}(B_1), E^{(2)}(B_2)] = 0 \tag{16}$$

für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^1$. Im Falle, dass A_1 und A_2 beschränkte, selbstadjungierte Operatoren sind, mit $\mathcal{D}_{A_1} \equiv \mathcal{D}_{A_2} \equiv \mathcal{H}$ kann man zeigen, dass (16) *eine notendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass auch $[A_1, A_2] = 0$.*

4.3 Born'sche Korrespondenzregeln

Diese letzte Betrachtung zeigt, dass, wenn $A_1, \dots, A_n$ selbstadjungierte Operatoren sind, die kompatiblen Observablen entsprechen, mit ihren Spektralmaßen $E^{(1)}(B), \dots, E^{(n)}(B)$, dann auch ihre Spektralmaße $E^{(1)}(B_1), \dots, E^{(n)}(B_n)$ kommutieren, und folglich der Operator

$$E(B_1 \times \cdots \times B_n) = E^{(1)}(B_1) \cdots E^{(n)}(B_n) \tag{17}$$

ein Projektor ist. (Vergleiche dazu Satz 4).

Definition 34 (Born'sche Korrespondenzregel für determinative Messungen)**.** *Seien n kompatible Observablen repräsentiert durch n kommutierende, selbstadjungierte Operatoren $A_1, \dots, A_n$ auf $\mathcal{H}$, mit Spektralmaßen $E^{A_1}(B), \dots, E^{A_n}(B)$. Das Spektralmaß*

$$E^{A_1,\dots,A_n}(B), \quad B \in \mathcal{B}^n \tag{18}$$

erfüllt dann

$$E^{A_1,\dots,A_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = E^{A_1}(B_1) \cdots E^{A_n}(B_n) \tag{19}$$

für alle $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}^1$. Wenn die vektorwertige Funktion $\psi(t)$

$$\psi(t) \in \mathcal{H}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

einen Zustand des gegebenen Systems beschreibt, dann ist das Maß

$$P^{A_1,\dots,A_n}_{\psi(t)}(B) = ||\psi(t)||^{-2} \langle \psi(t) | E^{A_1,\dots,A_n}(B) \psi(t) \rangle \tag{20}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Für jedes $B \in \mathcal{B}^n$ ist dann der Wert von $P^{A_1,\dots,A_n}_{\psi(t)}(B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung zum Zeitpunkt t die simultanen Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A_1, \dots, A_n$ hervorbringt bzw. liegt das Ergebnis in B, d.h. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in B$ bei t.

4.4 Physikalische Zustände

Wir haben bereits gesehen, dass in der Quantenmechanik die Observablen durch selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen dargestellt werden, und dass ein Zustand durch eine vektorwertige Funktion $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, beschrieben wird. Dies lässt sich als die allgemeinste notwendige Grundlage für die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems zusammenfassen.

Axiom 0. Mit jedem quantenmechanischen System kann ein komplexer Hilbertraum $\mathcal{H}$ verknüpft werden, auf dem das System formuliert werden kann.
Wenn h ein normierter Vektor im komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist, dann heißt die Menge

$$\tilde{h} = \{ah : a \in \mathbb{C}^1, |a| = 1\}$$

ein Strahl in $\mathcal{H}$. Wenn ψ_0 ein normierter Vektor ist, der einen Zustand zum Zeitpunkt t_0 repräsentiert, dann ist für jede komplexe Zahl a, $|a| = 1$, $a\psi_0$ auch ein normierter Vektor der denselben Zustand beschreibt. Man kann also sagen: 'Ein Zustand eines quantenmechanischen Systems zu einem Zeitpunkt ist durch einen Strahl im Hilbertraum gegeben'. Weiters sei erwähnt, dass wir Observable, die eine duale Rolle spielen, also zum einen ein selbstadjungierter Operator sind, zum anderen direkt experimentell verankert sind indem sie mit dem Messprozess verbunden sind, fundamentale Observable nennen.

4.5 Beschränkte Funktionen einer endlichen Menge von kommutierenden, selbstadjungierten Operatoren

Die mathematische Basis des Konzeptes von Funktionen von Observablen wird in den folgenden Theoremen beschrieben. Das unmittelbar folgende Theorem wird außerdem bei unserem Beweis der Existenz des Zeitentwicklungsoperators benötigt, deshalb wird auch der Beweis dieses Theorems angegeben.

Satz 7. *Seien $E^{A_1}(B), \dots, E^{A_n}(B)$ die Spektralmaße von n kommutierenden, selbstadjungierten Operatoren $A_1, \dots, A_n$ auf $\mathcal{H}$. Das Spektralmaß $E^{A_1,\dots,A_n}(B)$, $B \in \mathcal{B}^n$ erfüllt dann*

$$E^{A_1,\dots,A_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = E^{A_1}(B_1) \cdots E^{A_n}(B_n) \tag{21}$$

für alle $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}^1$. Wenn $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine beschränkte Borel-messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist,

$$|F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)| \leq M, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^1, \tag{22}$$

dann gibt es einen eindeutigen, beschränkten, linearen Operator A, der der Gleichung

$$\langle f|Ag\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\langle f|E^{A_1,\dots,A_n}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} g\rangle \tag{23}$$

genügt, für alle Vektoren $f, g \in \mathcal{H}$. Dieser Operator A, formal angegeben als $F(A_1, \dots, A_n)$, ist beschränkt und $||F(A_1, \dots, A_n)|| \leq M$.

Beweis Aus folgendem Zusammenhang schließen wir:

$$\langle f|E(S)g\rangle = \frac{1}{2i}\langle f+ig|E(S)(f+ig)\rangle + \frac{1}{2}\langle f+g|E(S)(f+g)\rangle - \frac{1-i}{2}(\langle f|E(S)f\rangle + \langle g|E(S)g\rangle) \tag{24}$$

Auf der rechten Seite finden wir nur Mengenfunktionen der Form $\langle h|E(S)h\rangle$ vor, die offensichtlich Maße sind. So können wir $\mu_{f,g}(B)$ als komplexes Maß einführen, welches gegeben ist durch

$$\mu_{f,g}(B) = \langle f|E^{A_1,\dots,A_n}(B)g\rangle, \quad B \in \mathcal{B}^n. \tag{25}$$

Das komplexe Maß $\mu_{f,g}(B)$ entspricht also der oben angegebenen Summe von endlichen Maßen. Weiters ist jede beschränkte, messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ integrabel (Vergeiche dazu Satz 6). Somit ist das Funktional

$$(f|g) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\mu_{f,g}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

definiert für alle $f, g \in \mathcal{H}$. Das Funktional ist offensichtlich eine Bilinearform (Vergleiche dazu Definition 16).
Wir konstruieren eine Folge $s_1, s_2, \dots$ von komplexen, einfachen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

$$s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n_k} a_{ik}\chi_{B_{ik}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \tag{26}$$
$$B_{ik} \cap B_{i'k} = \emptyset \quad für \quad i \neq i',$$

für die

$$|s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)| \leq |F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)| \leq M, \tag{27}$$

und für alle $f, g \in \mathcal{H}$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_k(\lambda) d\mu_{f,g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda) d\mu_{f,g}(\lambda). \tag{28}$$

Wir brauchen nun die Schwarz-Cauchy-Ungleichung (Vgl. Satz 1), sowie die eben angegebene Formel 27, zuerst angewandt in $\mathcal{H}$, danach in $l^2(n_k)$. Wir finden

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{R}^n} s_k(\lambda)d\mu_{f,g}(\lambda)| \\
&\qquad = |\sum_{i=1}^{n_k} a_{ik}\mu_{f,g}(B_{ik})| \\
&\qquad \leq \sum_{i=1}^{n_k} |a_{ik}|\ |\langle f|E^{A_1,\dots,A_n}(B_{ik})g\rangle| \\
&\qquad \leq M\sum_{i=1}^{n_k} ||E^{A_1,\dots,A_n}(B_{ik})f||\ ||E^{A_1,\dots,A_n}(B_{ik})g|| \\
&\qquad \leq M[\sum_{i=1}^{n_k} ||E^{A_1,\dots,A_n}(B_{ik})f||^2]^{\frac{1}{2}}[\sum_{i=1}^{n_k} E^{A_1,\dots,A_n}(B_{ik})g||^2]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq M||f||\ ||g||.
\end{aligned}
$$

Diese letzte Ungleichung, zusammen mit Formel 28, liefert schließlich

$$|(f|g)| = M||f||\ ||g||.$$

Somit ist aber $(f|g)$ eine beschränkte Bilinearform, und wir können das Theorem von Riesz anwenden (Vgl. Satz 3), und finden:

$$\langle f|Ag\rangle = (f|g)$$

und $||A|| \leq M$.

$\square$

Wir brauchen für unseren späteren Beweis noch weitere Theoreme.

Satz 8. *Seien $A_1, \dots, A_n$ kommutierende, selbstadjungierte Operatoren. Wenn $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine komplexwertige, beschränkte Borel-messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, und, wenn $F^*(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ihre komplexe Konjugation ist, dann ist $F^*(A_1, \dots, A_n)$ die Adjungation von $F(A_1, \dots, A_n)$.*

Beweis Nach Satz 7 haben wir

$$\langle f|F(A_1, \dots, A_n)g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda)d\langle f|E_\lambda^{A_1,\dots,A_n} g\rangle.$$

Das selbe Theorem angewandt auf $F^*(A_1, \dots, A_n)$ liefert

$$\langle g|F^*(A_1, \dots, A_n)f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F^*(\lambda)d\langle g|E_\lambda^{A_1,\dots,A_n} f\rangle.$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\langle F^*(A_1, \dots, A_n)f|g\rangle \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda)d\langle g|E_\lambda^{A_1,\dots,A_n} f\rangle^* \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda)d\langle E_\lambda^{A_1,\dots,A_n} f|g\rangle \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda)d\langle f|E_\lambda^{A_1,\dots,A_n} g\rangle \\
&\qquad = \langle f|F(A_1, \dots, A_n)g\rangle
\end{aligned}
$$

für alle $f, g \in \mathcal{H}$. Somit ist $F^*(A_1, \dots, A_n) = [F(A_1, \dots, A_n)]^*$.

$\square$

Satz 9. *Wenn $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine reelle, beschränkte, Borel-messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, und $A_1, \dots, A_n$ n kommutierende, selbstadjungierte Operatoren sind, dann ist der Operator $A = F(A_1, \dots, A_n)$ selbstadjungiert und sein Spektralmaß $E^A(B)$ genügt der Gleichung*

$$E^A(B) = E^{A_1,\dots,A_n}(F^{-1}(B)) \tag{29}$$

für alle $B \in \mathcal{B}^1$.

Beweis Wenn $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = F^*(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dann folgt aus dem vorherigen Satz

$$[F(A_1, \dots, A_n)]^* = F^*(A_1, \dots, A_n) = F(A_1, \dots, A_n).$$

Der Operator $A = F(A_1, \dots, A_n)$ ist also selbstadjungiert. Die Projektorwertige Mengenfunktion

$$E^{(F)}(B) = E^{A_1,\dots,A_n}(F^{-1}(B)) \tag{30}$$

ist ein Spektralmaß auf $\mathcal{B}^1$. Es gilt zu zeigen, dass für alle f, g

$$\langle f|Ag\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda d\langle f|E_\lambda^{(F)} g\rangle, \tag{31}$$

sowie dass es sich bei $E^{(F)}$ tatsächlich um ein Spektralmaß handelt. Durch Gleichsetzten mit Formel 23 finden wir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\langle f|E_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}^{A_1,\dots,A_n} g\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda d\langle f|E_\lambda^{(F)} g\rangle. \tag{32}$$

Wenn nun $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \chi_{B_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist, mit $B_1 \in \mathcal{B}^n$, kann man zeigen, dass sich (32) auf (30) reduziert. Somit kann geschlossen werden, dass (32) auch erfüllt ist, wenn $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine einfache Funktion ist. Dies wird gezeigt indem man zuerst für nichtnegative $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, hernach für alle reellen Funktionen $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (32) zeigt, durch Anwendung von Definitionen für Integration auf Maßräumen. (Ich habe hier nicht alle notwendigen Definitionen angegeben, diese können im Buch *Quantum Mechanics in Hilbert Space* nachgelesen werden).

$\square$

Satz 10. *Wenn $F_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $i = 1, 2$, zwei beschränkte, Borel-messbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind, und $A_1, \dots, A_n$ kommutierende selbstadjungierte Operatoren, dann gilt*

$$(F_1 + F_2)(A_1, \dots, A_n) = F_1(A_1, \dots, A_n) + F_2(A_1, \dots, A_n), \tag{33}$$
$$(F_1 \cdot F_2)(A_1, \dots, A_n) = F_1(A_1, \dots, A_n) F_2(A_1, \dots, A_n). \tag{34}$$

Beweis Da F_1 und F_2 beschränkte Funktionen sind, ist auch ihre Summe $F_1 + F_2$, bzw ihr Produkt $F_1 \cdot F_2$ beschränkt. Ferner kann man zeigen, dass $F_1 + F_2$, bzw. $F_1 \cdot F_2$ Borel-messbar sind. (Hier nicht ausgeführt, siehe *Quantum Mechanics in Hilbert Space*). Dann sind die Operatoren A, B definiert wie in Satz 7:

$$A = (F_1 + F_2)(A_1, \dots, A_n)$$
$$B = (F_1 \cdot F_2)(A_1, \dots, A_n).$$

Wir erhalten (33), indem wir die Definition von A als eine Funktion von $A_1, \ldots, A_n$ verwenden und für alle $f, g \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\langle f|Ag\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} &(F_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + F_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))d\langle f|E^{A_1,\ldots,A_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} g\rangle \\ &= \langle f|F_1(A_1, \ldots, A_n)g\rangle + \langle f|F_2(A_1, \ldots, A_n)g\rangle.\end{aligned}$$

Um (34) zu zeigen schreiben wir vorerst an:

$$\begin{aligned}&\langle f|F_1(A_1, \ldots, A_n)F_2(A_1, \ldots, A_n)g\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)d\langle f|E^{A_1,\ldots,A_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} F_2(A_1, \ldots, A_n)g\rangle.\end{aligned} \tag{35}$$

Für beliebeiges $B \in \mathcal{B}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\langle f|E^{A_1,\ldots,A_n}(B)F_2(A_1, \ldots, A_n)g\rangle & \\ &= \langle E^{A_1,\ldots,A_n}(B)f|F_2(A_1, \ldots, A_n)g\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)d\langle E^{A_1,\ldots,A_n}(B)f|E^{A_1,\ldots,A_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} g\rangle \\ &= \int_B F_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)d\langle f|E^{A_1,\ldots,A_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} g\rangle\end{aligned}$$

weil das komplexe Maß

$$\mu_{f,g}(B_1) = \langle E^{A_1,\ldots,A_n}(B)f|E^{A_1,\ldots,A_n}(B_1)g\rangle$$

auf Mengen B_1 die außerhalb von B liegen verschwindet. So folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)d\langle f|E^{A_1,\ldots,A_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} F_2(A_1, \ldots, A_n)g\rangle & \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)F_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)d\langle f|E^{A_1,\ldots,A_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} g\rangle \\ &= \langle f|(F_1 \cdot F_2)(A_1, \ldots, A_n)g\rangle,\end{aligned}$$

kombiniert mit (35) die Formel (34) beweist.

□

4.6 Schrödingerbild

Wir haben bisher gesehen, dass eine Beschreibung der Quantenmechanik in unserem Formalismus durch einen Hilbertraum gegeben ist, auf dem selbstadjungierte Operatoren mit Observablen des Systems verknüpft werden. Physikalische Zustände werden als vektorwertige Funktionen $\psi(t)$ mit Zeitvariable $t \in \mathbb{R}^1$ dargestellt. Dabei ist nicht jede vektorwertige Funktion als Repräsentant eines Zustandes geeignet, da wir eine prädiktive Theorie haben wollen. Aus diesem Grund muss die einen Zustand repäsentierende Funktion $\psi(t)$ einem dynamischen Gesetz gehorchen. Wir haben bereits den Hamilton eines Systems kennengelernt, den selbstadjungierten Operator H, der der Gesamtenergie des zu beschreibenden Systems zugeordnet wird. Der Hamilton spielt aber noch eine zweite wichtige Rolle, nämlich im Bezug auf die Bewegungsgleichung und der damit verbundenen Dynamik. Wir postulieren, dass ein Zustand des Systems die *Schrödinger-Gleichung* erfüllt.

$$i\hbar\frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t). \tag{36}$$

Wenn wir nun diese Gleichung betrachten, so müssen zunächst zwei grundlegende mathematische Fragen abgehandelt werden. Die erste Frage betrifft die Ableitung in Gleichung (36). Wir beantworten die Frage, indem wir folgende Definition vornehmen:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = s\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\psi(t + \Delta t) - \psi(t)).$$

Die zweite Frage betrifft den Umstand, dass wir i.A. nicht davon ausgehen können, dass H ein beschränkter Operator ist. Dies bedeutet, dass wir nicht für jeden Zustand eine Lösung der Gleichung (36) angeben können, da ja $\psi \in \mathcal{D}_{H'}$, andererseits aber $\mathcal{D}_H \neq \mathcal{H}$. Wir umgehen diese letzte Schwierigkeit indem wir das dynamische Gesetz nicht über die Bewegungsgleichung definieren.

4.7 Der Zeitentwicklungsoperator

Endlich sind wir nun am eigentlichen Ziel unserer Reise angelangt, allerdings müssen wir auch hier langsam und ruhig voranschreiten. Wir betrachten folgende Funktion: $exp(-(i/\hbar)\lambda(t-t_0))$. Sie ist stetig, und somit Borel-messbar, als auch beschränkt für $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Aufgrund dieser Eigenschaften ist es nun möglich einen beschränkten Operator hinzuschreiben, den Zeitentwicklungsoperator.

$$U(t,t_0) = exp[-(i/\hbar)H(t-t_0)] \tag{37}$$

Wir haben nun schon fast alle notwendige Arbeit getan, und könne aufgrund von Satz 7 aussagen, dass der Operator $U(t,t_0)$ folgender Gleichung genügt:

$$\langle f|U(t,t_0)g\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} exp(-(i/\hbar)\lambda(t-t_0))d\langle f|E_\lambda g\rangle \tag{38}$$

für alle $f, g \in \mathcal{H}$, wobei E_λ die Spektralfunktion von H ist,

$$H = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda dE_\lambda. \tag{39}$$

Wir wollen zum Abschluss ein Theorem anschreiben und beweisen, welches die zentralen Eigenschaften des Operators $U(t,t_0)$ zusammenfasst. Allerdings brauchen wir für den Beweis zwei Lemmata, die wir uns jetzt ansehen wollen.

Lemma 1. *Sei $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots$ eine Folge von nichtnegativen Funktionen, definiert auf einer messbaren Menge R eines Maßraumes $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ und integrabel auf R. Der $\lim_{n\to\infty} f_n(\xi) = 0$ fast überall. Wenn es eine Funktion $g(\xi)$ gibt, die integrabel auf R ist und Majorante der Folge, d.h. falls $f_n(\xi) \leq g(\xi)$ für alle $n = 1, 2, \ldots,$ dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n(\xi) d_\mu(\xi) = 0.$$

Beweis Die Funktionen

$$g_n(\xi) = sup\{f_n(\xi), f_{(n+1)}(\xi), \ldots\}$$

sind messbar. Da $g_n(\xi) \leq g(\xi)$, sind sie auch integrabel auf R. Weiters ist $\lim_{n\to\infty} g_n(\xi) = 0$ fast überall. Man kann zeigen (Lebesgue monotones Konvergenz Theorem, hier nicht ausgeführt, siehe *Quantum Mechanics in Hilbert Space*), dass, wenn $g_1(\xi) \leq g_2(\xi) \leq \cdots$ gilt, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_R g_n(\xi) d\mu(\xi) = 0.$$

Wir erhalten das gesuchte Ergebnis indem wir finden dass $f_n(\xi) \leq g_n(\xi)$.

□

Lemma 2 (Fatou'sches Lemma)**.** *Wenn $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots$ eine Folge von nichtnegativen Funktionen ist, integrabel auf der Untermenge R des Maßraumes $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, und fast überall gegen eine Funktion $f(\xi)$ konvergiert, und wenn*

$$\int_R f_n(\xi) d_\mu(\xi) \leq M$$

für alle n, dann ist $f(\xi)$ integrabel auf R und

$$\int_R f(\xi)d\mu(\xi) \leq M.$$

Beweis Wir betrachten die auf R integrablen Funktionen

$$g_n(\xi) = inf\{f_n(\xi), f_{n+1}(\xi), \ldots\}$$

und $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} g_n(\xi)$ fast überall in R.
Man kann zeigen, dass $f(\xi)$ integrabel auf R ist, und dass

$$\int_R f(\xi)d\mu(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int g_n(\xi)d\mu(\xi).$$

(Hier wird dies nicht gezeigt, vergleiche dazu *Quantum Mechanics in Hilbert Space*).
Da $g_n(\xi) \leq f_n(\xi)$ für alle Werte von n, ist

$$\int_R g_n(\xi)d\mu(\xi) \leq M,$$

was zeigt, dass M eine Schranke für das Integral von $f(\xi)$ über R ist.

□

Nun haben wir alle Werkzeuge die wir benötigen um den letzten, in unserer Betrachtung zentralen Satz anzuschreiben und zu beweisen. Der Satz fasst die Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators zusammen, und beschließt auch diese Arbeit.

Satz 11. *Wenn A ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ ist, dann hat die operatorwertige Funktion*

$$U_t = e^{iAt}, \ t \in \mathbb{R}^1, \tag{40}$$

folgende Eigenschaften:

1. $U_0 = 1$;
2. U_t *ist ein unitärer Operator auf* $\mathcal{H}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}^1$;
3. $U_{t_1}U_{t_2} = U_{t_1+t_2}$ *für alle* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$;
4. *falls* $f \in \mathcal{D}_A$,
$$iAf = s - \lim_{t\to 0} \frac{U_t f - f}{t} \tag{41}$$
und umgekehrt, der starke Limes existiert nur, wenn $f \in \mathcal{D}_A$.

Beweis
1. Wenn E_λ die Spektralfunktion von A ist,

$$A = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda dE_\lambda,$$

dann ist nach Satz 7

$$\langle f|U_t g\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t} d\langle f|E_\lambda g\rangle. \tag{42}$$

Wenn wir nun für $t = 0$ einsetzen, so erhalten wir

$$\langle f|U_0 g\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} d\langle f|E_\lambda g\rangle = \langle f|g\rangle$$

für alle $f, g \in \mathcal{H}$, was *1.* beweist.

2. Man kann zeigen, dass ein linearer Operator, definiert auf dem ganzen Hilbertraum, dann und nur dann ein unitärer Operator ist, wenn gilt:

$$U^*U = UU^* = 1, \tag{43}$$

d.h., dann und nur dann wenn $U^{-1} = U^*$. (Der Beweis ist hier nicht ausgeführt, siehe dazu *Quantum Mechanics in Hilbert Space*). Diese Relation ist aber erfüllt, der Beweis folgt mit

$$e^{i\lambda t}(e^{i\lambda t})^* = 1 \tag{44}$$

und durch Verwendung der Sätze 8 und 10.

3. Aus Satz 10 erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle f|U_{t_1}U_{t_2}g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda t_1}e^{i\lambda t_2}d\langle f|E_\lambda g\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda(t_1+t_2)}d\langle f|E_\lambda g\rangle \\ &= \langle f|U_{t_1+t_2}g\rangle \end{aligned}$$

für alle $f, g \in \mathcal{H}$, was beweist, dass $U_{t_1}U_{t_2} = U_{t_1+t_2}$.

4. Die Definitionsmenge des Operators

$$(1/t)(U_t - 1) - iA \tag{45}$$

ist $\mathcal{D}_A$ da $U(t)$ überall auf $\mathcal{H}$ definiert ist. Dieser Operator ist eine Funktion von A, die entsprechende komplexe Funktion ist

$$F_t(\lambda) = (1/t)(e^{i\lambda t} - 1) - i\lambda. \tag{46}$$

Für $f \in \mathcal{D}_A$ gilt

$$\begin{aligned} &||\frac{1}{t}(U_t - 1)f - iAf||^2 \qquad (47) \\ &\quad = \langle f|(\frac{1}{t}(U_t - 1) - iA)^*(\frac{1}{t}(U_t - 1) - iA)f\rangle \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^1} |\frac{1}{t}(e^{i\lambda t} - 1) - i\lambda|^2 d\langle f|E_\lambda f\rangle. \end{aligned}$$

Wegen dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$(1/t)(e^{i\lambda t} - 1) = i\lambda e^{i\lambda\theta t},\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

woraus folgt, dass

$$|F_t(\lambda)|^2 \leq |\lambda|^2|e^{i\lambda\theta t} - 1|^2 \leq 4|\lambda|^2. \tag{48}$$

Für die Funktion $|F_t(\lambda)|^2$ ist also für alle t die Funktion $4|\lambda|^2$ Majorante. Sie ist integrabel mit dem Maß $\mu_f(B) = \langle f|E(B)f\rangle$, und es gilt $\lim_{t\to 0}|F_t(\lambda)|^2 = 0$. Nach Lemma 1 haben wir

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^1} |F_t(\lambda)|^2 d\langle f|E_\lambda f\rangle = 0,$$

und wir können aus Formel (47) auf (41) schließen.
Nehmen wir nun an

$$s - \lim_{t\to 0}(1/t)(U_t - 1)g \tag{49}$$

existiert für $g \in \mathcal{H}$. Mit den Sätzen 7,8 und 10 können wir schreiben:

$$||\frac{1}{t}(U_t - 1)g||^2 = \langle g|\frac{1}{t^2}(U_t - 1)^*(U_t - 1)g\rangle \tag{50}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^1} |\frac{1}{t}(e^{i\lambda t} - 1)|^2 d\langle g|E_\lambda g\rangle.$$

Die Existenz des starken Limes in Formel (49) impliziert die Existenz einer Konstanten M derart, dass

$$||(1/t)(U_t - 1)f||^2 \leq M$$

für alle $t \in \mathbb{R}^1$.
Mit Formel (50)

$$\lim_{t \to 0} |(1/t)(e^{i\lambda t} - 1)|^2 = \lambda^2,$$

finden wir durch Anwendung des Fatou'schen Lemmas, dass λ^2 bzgl. des Maßes $\mu_g(B) = \langle g|E(B)g\rangle$ integrabel ist. Dann folgt mit dem Spektraltheorem, dass $g \in \mathcal{D}$ ist.

$\square$

Damit beschließen wir unsere Betrachtung des dynamischen Gesetzes.

5 Quellenangaben

1. *Quantum Mechanics in Hilbert Space, Eduard Prugovečki, ACADEMIC PRESS New York and London, 1971*

Dieses ausgezeichnete Buch ist die einzige verwendete Quelle. Die darin enthaltenen Definitionen und Sätze, sowie Beweise wurden Übersetzt und im Wesentlichen, oft aber in verkürzter Form, übernommen. *Quantum Mechanics in Hilbert Space* liefert eine im Prinzip 'vollständige' Beschreibung, dh. jede notwendige Definition, bzw. jede notwendige Aussage inklusive deren Beweis ist vollständig angegeben, und das bis auf eine sehr tiefe Ebene hinunter. Deshalb ist es grundsätzlich möglich sich dem Studium der Axiomatik hinzugeben ohne Sekundärliteratur bemühen zu müssen.

6 Appendix A: Verwendete Symbole

Verwendete Symbole

A	linearer Operator
$\mathcal{A}(X)$	Boole'sche Algebra
$\mathcal{A}_\sigma(X)$	Boole'sche σ-Algebra
B	Borelmenge
$\mathcal{B}^n$	Familie von Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{B}^n_\Omega$	Familie von Boreluntermengen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$\mathcal{D}_A$	Definitionsbereich des Operators A
$\mathcal{F}$	Körper
$\triangle$	Laplaceoperator
$d(\cdot,\cdot)$	metrische Funktion
$E(S)$	Spektralmaß
E_λ	Spektralfunktion
H	Hamilton
$\mathcal{H}$	Hilbertraum
$\chi_S(\cdot)$	charakteristische Funktion
$\mathcal{K}$	Klasse von Mengen
$L^2(\Omega,\mu)$	Hilbertraum der μ - quadratintegrablen Funktionen auf Ω
$L_{(2)}(\Omega,\mu)$	Familie von μ - quadratintegrablen Funktionen auf Ω
$l^2(n)$	Hilbertraum der einspaltigen komplexen Matrizen, $n = 1,\ldots,+\infty$
$l.i.m.$	Limes im Mittel
$\mathcal{M}$	Metrischer Raum
$\mu(S)$	Maß von S
$\mathcal{N}$	normierter Raum
$\mathcal{U}$	linearer Raum
U	Unitärer Operator
$U\{t,t_0\}$	Zeitentwicklungsoperator
$\mathcal{V}$	Vektorraum
$\mathcal{X}$	Menge auf der ein messbarer Raum definiert ist
$\otimes_a$	algebraisches Tensorprodukt
$\langle\cdot\vert\cdot\rangle$	inneres Produkt
$\vert\vert\cdot\vert\vert$	Norm